1　80%の確率で正確に伝達し、20%の確率で間違って伝達する。

(1)　00 → 00

$0.8 \times 0.8 = 0.64$　　∴ 64%

(2)　01 → 10

$0.2 \to 0.2 = 0.04$　　∴ 4%

(3)　00 → 11　$0.2 \times 0.2 = 0.04$

01 → 11　$0.2 \times 0.8 = 0.16$

10 → 11　$0.8 \times 0.2 = 0.16$

11 → 11　$0.8 \times 0.8 = 0.64$

ここでどの豆を選ぶかは平等に $\frac{1}{4}$ なので

$\frac{1}{4}(0.04 + 0.16 + 0.16 + 0.64) = 0.25$　　∴ 25%

(4)　$\dfrac{\frac{1}{4} \times 0.64}{0.25} = \dfrac{16}{25} = 0.64$　　64%

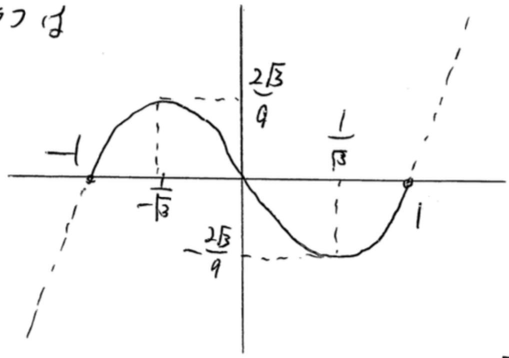
Ⅱ (1) $h(x)=x(x+1)(x-1)$ とすると.

$h'(x)=(x+1)(x-1)+x(x-1)+x(x+1)$

$=x^2-1+x^2-x+x^2+x=3x^2-1$

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ | $\searrow$ | $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ | $\nearrow$ | $0$ |

$h(x)$ のグラフは




よって $h(x)$ の値域は $-\frac{2\sqrt{3}}{9}\leqq h(x)\leqq\frac{2\sqrt{3}}{9}$

$f(x)=\{h(x)\}^2$ なので $f(x)$ の値域は $0\leqq f(x)\leqq\frac{4}{27}$

(2) $f(x)$ は 6 次式 $Q(x)$ は 2次式なので $Q(x)$ は 4次式

$R(x)$ は高々 1次式である.

よって.

$R(x)=ax+b$ とおくと.

$f(x)=Q(x)g(x)+ax+b$

$x=i$ を代入すると, $g(i)=0$ より.

$f(i)=ai+b$

$=i^2(i+1)^2(i-1)^2$

$=-1\times(-1-1)^2=-4$

$\therefore a=0,\ b=-4$ これより $R=-4$

次に $h(x)$ を $g(x)$ でわると　$h(x)=x^3-x$ より.

$$
\begin{array}{r}
x \phantom{\quad\;\; -x} \\
x^2+1\,\big)\overline{\,x^3 \qquad -x\,} \\
\underline{x^3 \qquad +x} \\
-2x
\end{array}
$$

$\therefore\ h(x)=xg(x)-2x$

これより.

$$
\begin{aligned}
f(x)=\{h(x)\}^2&=\{xg(x)-2x\}^2\\
&=x^2\{g(x)\}^2-4x^2g(x)-4x^2\\
&=x^2\{g(x)\}^2-4x^2g(x)+4(x^2+1)-4\\
&=g(x)\{x^2g(x)-4x^2+4\}-4
\end{aligned}
$$

一方

$f(x)=Q(x)g(x)-4$　より

$$
\begin{aligned}
Q(x)&=x^2g(x)-4x^2+4\\
&=x^2(x^2+1)-4x^2+4\\
&=\underline{x^4-3x^2+4}
\end{aligned}
$$

(3)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{-4}{x^2+1} = -4\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$　…(*)

$x=\tan\theta$ とおくと.　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

| $x$ | $0\to1$ |
|---|---|
| $\theta$ | $0\to\frac{\pi}{4}$ |

より.

$$(*)=-4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan\theta}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\underline{-\pi}$$

(4) $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 4)g(x) + R$

$g(x) \neq 0$ より 両辺を $g(x)$ でわって.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^4 - 3x^2 + 4 + \frac{R}{g(x)}$$

0から1まで積分して.

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int_0^1 (x^4 - 3x^2 + 4)dx + \int_0^1 \frac{R}{g(x)}dx$$

$$= \int_0^1 (x^4 - 3x^2 + 4)dx - \pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi = \int_0^1 (x^4 - 3x^2 + 4)dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)}dx$$

$$= \frac{1}{5} - 1 + 4 - \int_0^1 \frac{x^2(x+1)^2(x-1)^2}{x^2+1}dx$$

$$= 3.2 - \int_0^1 \frac{x^2(x+1)^2(x-1)^2}{x^2+1}dx$$

右辺の第2項は 分母, 分子ともに正なので正の関数の積分なので正の値をとる。

$$\therefore \pi < 3.2$$

III (1) 各 $P_k$ が H内に存在するとき、

$$h_k > 0$$

$$2(73-15kt) > 0$$

$k=1,2,3,4$ に対して、これがみたされないことはないので、

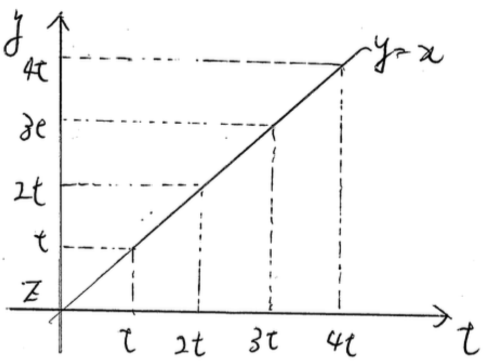
$$0 < t < \frac{73}{60}$$

(2) $P_k(x_k, y_k, z_k)$ とおくと、

$$\begin{cases} x_k = kt \\ y_k = kt \\ z_k = 2(73-15kt) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 146 \end{pmatrix} + kt \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -30 \end{pmatrix}$$

これは、点 $(0, 0, 146)$ を通り、方向ベクトル $(1, 1, -30)$ である直線

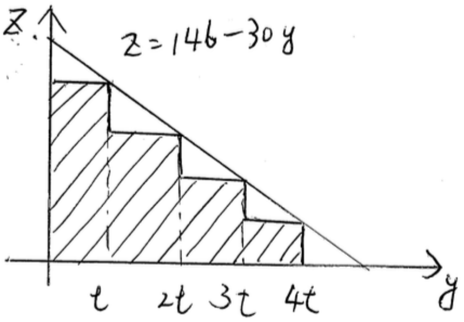
(3) Tをz軸方向正からみると、




よって ここから見た面積は $16t^2$

裏面もあるので　$32t^2$

x軸正の方向から見ると、




ここから見た面積は

$$\sum_{k=1}^{4} t(146-30kt) = 584t - 300t^2$$

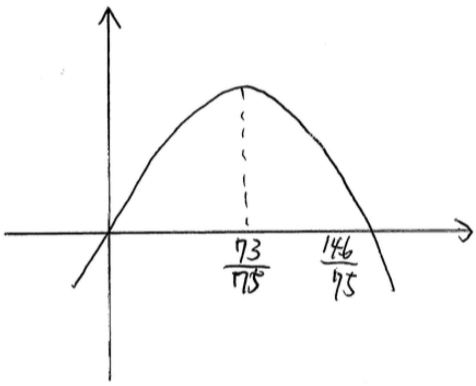
裏面と合わせて

$$1168t - 600t^2$$

(4) $S = 1168t - 600t^2$

$= -600t\left(t - \dfrac{1168}{600}\right)$

$= -600t\left(t - \dfrac{146}{75}\right)$




よって $S$ は $t = \dfrac{73}{75}$ で最大値をとる.

このとき

$z_1 = 146 - 30t$

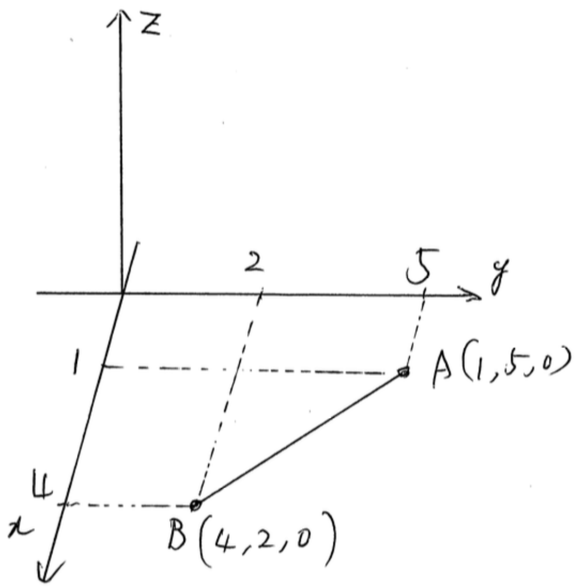
$= 146 - 30 \times \dfrac{73}{75}$

$= 146 - \dfrac{146}{15} = 146 \times \dfrac{14}{15}$

$= \dfrac{2044}{15}$

IV

(1) A$(1,5,0)$ B$(4,2,0)$ C$(t,2t,t-1)$




$\overrightarrow{AB}=(3,-3,0)\ /\!/\ (1,-1,0)$ より

(i) $\angle A=90^\circ$ のとき

$(1,-1,0)\cdot\overrightarrow{AC}=0 \iff (1,-1,0)(t-1,2t-5,t-1)=0$

$t-1-2t+5=0$

$t=4$

$\angle B=90^\circ$ のとき

$(1,-1,0)\cdot\overrightarrow{BC}=0 \iff (1,-1,0)(t-4,2t-2,t-1)=0$

$t-4-2t+2=0$

$t=-2$

$\angle C=90^\circ$ のとき

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \iff (t-1,2t-5,t-1)(t-4,2t-2,t-1)=0$

$\iff (t-1)(t-4)+(2t-5)(2t-2)+(t-1)^2=0$

$\iff (t-1)\{t-4+2(2t-5)+t-1\}=0$

$\iff (t-1)(6t-15)=0$

$\therefore t=1,\ \frac{5}{2}$

(2) $\overrightarrow{AD}=(0,1,1)$

よって $\vec{n}=(1,1,-1)$ を考えると $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ なので，
$\vec{n}$ は平面 ABD の法線ベクトルとなる．よって平面 ABD の方程式は

$$(x-1)+(y-5)-z=0$$
$$\Leftrightarrow\ x+y-z=6$$

この平面上に C があるので

$$t+2t-(t-1)=6$$
$$2t=5$$
$$t=\frac{5}{2}$$

(3) (1)より ∠BAC が直角になるのは $t=4$ のとき．
このとき $(14,8,3)$ となる．

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AD}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{18\times2-9}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

一方，平面 $x+y-z-6=0$ と $(14,8,3)$ との距離は

$$\frac{|14+8-3-6|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

よって体積は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$$