$\boxed{1}$

(1) $(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)-4ab$

$= (a^2-1)(b^2-1)-4ab$

$= (ab)^2-(a^2+b^2)+1-4ab$

$= (ab-1)^2-(a+b)^2$

$= (ab-1+a+b)(ab-1-a-b)$

(2) $(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)=4ab$

$\Leftrightarrow\ (ab+a+b-1)(ab-a-b-1)=0$

$\Leftrightarrow\ ab+a+b-1=0$

または

$ab-a-b-1=0$

$\Leftrightarrow\ (a+1)(b+1)=2 \quad \cdots ①$

または

$(a-1)(b-1)=2 \quad \cdots ②$

$a<b$ より ①のとき

$(a+1)(b+1)=2$ より $(a+1,\ b+1)=(-2,\ -1),\ (1,\ 2)$

$\therefore (a,\ b)=(\quad,\quad),\ (-1,\ 0)$

②のとき

$(a-1)(b-1)=2$ より $(a-1,\ b-1)=(-2,\ -1)(1,\ 2)$

$\therefore (a,\ b)=(-1,\ 0)(2,\ 3)$

以上より この4組のうち どちらも正になるのは

$(a,\ b)=(2,\ 3)$

$\boxed{2}$ $\{a_n\}$：初項2，公差d とする．

(1) $a_n = 2+(n-1)d$

$\{b_n\}$：初項0 公差e とする．

このとき

$b_n = (n-1)e$

よって条件より

$a_{k+1} = b_{k+1} \Leftrightarrow 2+kd = ke$

$a_{2k+1} = 0 \Leftrightarrow 2+2kd = 0$

$kd = -1 \quad \therefore d = -\frac{1}{k}$

以上より

$\therefore 2-1 = ke \Leftrightarrow e = \frac{1}{k}$

これより．

$a_n = 2-\frac{n-1}{k}$

$b_n = \frac{n-1}{k}$

$\therefore a_2 = 2-\frac{1}{k}$

$a_{k+1} = 2-\frac{k}{k} = 1$

(2)

(1)の結果より．

$b_2 = \frac{1}{k}$

$b_{2k+1} = 2$

(3) $C_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} C_n = \dfrac{2-\frac{n}{k}}{\frac{n}{k}} C_n = \dfrac{2k-n}{n} C_n$

$$C_n = \frac{2k-(n-1)}{n-1} C_{n-1} = \frac{2k+1-n}{n-1} \times \frac{2k+2-n}{n-2} C_{n-2}$$

$$= \cdots = \frac{2k+1-n}{n-1} \times \frac{2k+2-n}{n-2} \times \cdots \times \frac{2k-1}{1} C_1$$

$$= \frac{(2k-1)!}{(2k-n)!(n-1)!} = {}_{2k-1}C_{n-1}$$

$$C_k = {}_{2k-1}C_{k-1}$$

$$C_{2k} = {}_{2k-1}C_{2k-1} = 1$$

(4) $\dfrac{C_{n+1}}{C_n} = \dfrac{2k-n}{n} > 1$

$\iff$ $n < k$ より.

$\dfrac{C_k}{C_{k-1}} > 1$, $\dfrac{C_{k+1}}{C_k} = 1$, $\dfrac{C_{k+2}}{C_{k+1}} < 1$

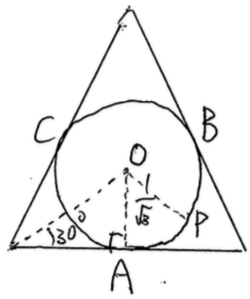
よって

$$C_1 < C_2 < \cdots < C_{k-1} < C_k = C_{k+1} > C_{k+2} > \cdots$$

となるので $\underline{n = k, k+1}$ //

(5) $\displaystyle\sum_{r=1}^{2k} C_r = \sum_{r=1}^{2k} {}_{2k-1}C_{r-1} = \underline{2^{2k-1}}$ //

3



(1) 正三角形では重心, 外心, 内心, 垂心が一致する.
よって OA が正三角形と接するとき
Aは辺の中点になっている
よって
$$OA = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$

$= (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})$

$= 3|\overrightarrow{OP}|^2 - 2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$

$= 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 120^\circ \times 3$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(3) $|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2$

$= |\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|^2 - 2(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA})$

$= |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OP}|^2 - 2\cdot\frac{1}{2}$

$= 9|\overrightarrow{OP}|^2 - 1 = 9\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \underline{2}$

(4) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP})$

$= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP} + |\overrightarrow{OP}|^2$

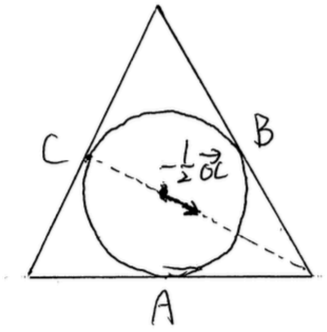
$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 120^\circ + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP} + |\overrightarrow{OP}|^2$

$= |\overrightarrow{OP}|^2 + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP} - \frac{1}{6}$

$= |\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}|^2 - \frac{1}{4}|\overrightarrow{OC}|^2 - \frac{1}{6}$

$= |\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}|^2 - \frac{1}{12} - \frac{1}{6}$

$= |\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}|^2 - \frac{1}{4}$



よって最小値は

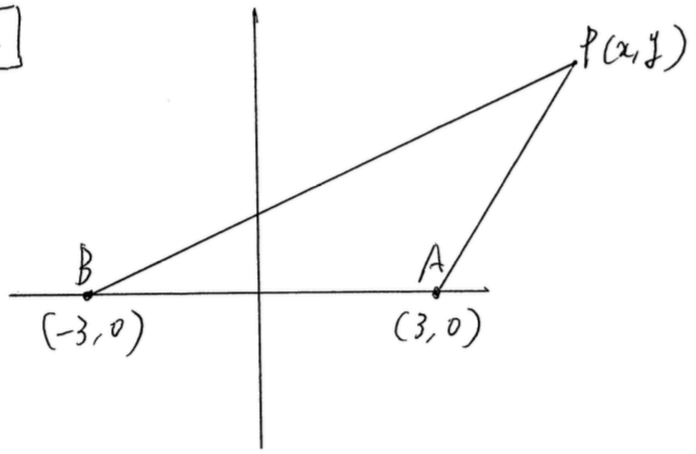
$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{4}=\underline{-\frac{1}{6}}$$

最大値は

$$\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\underline{\frac{1}{2}}$$

4



①　$PA \cdot PB = 12$

(1) $\Leftrightarrow \{(x-3)^2+y^2\}\{(x+3)^2+y^2\}=144$ …… (*)

上式は $y \to -y$ としても式が変わらないので x 軸対称、かつ
また $x \to -x$ としても式が変わらないので y 軸対称。

(2) (*)において $y=0$ とすると、

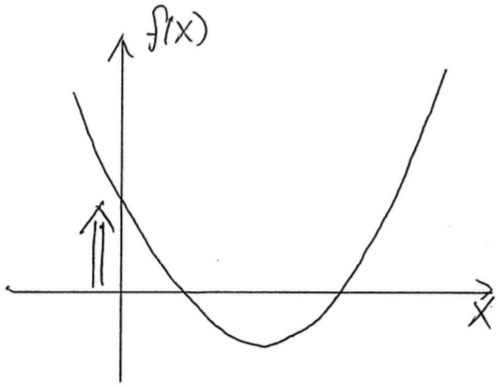
$$(x-3)^2(x+3)^2=144$$
$$x^2-9=\pm 12$$
$$x^2=9\pm 12=21$$
$$\therefore x=\pm\sqrt{21}$$

∴ x 軸との交点 $(\pm\sqrt{21}, 0)$

$x=0$ とすると

$$(y^2+9)^2=144$$
$$y^2+9=\pm 12$$
$$y^2=-9\pm 12=3$$
$$y=\pm\sqrt{3}$$

∴ y 軸との交点 $(0, \pm\sqrt{3})$



判別式 D とすると.

$$\frac{D}{4} = (y^2-9)^2 - (y^4+18y^2-63)$$
$$= -36y^2+144 \geqq 0$$
$$y^2 \leqq \frac{144}{36} = 4$$
$$-2 \leqq y \leqq 2 \quad \cdots ②$$

軸 $-(y^2-9) \geqq 0$

$$-3 \leqq y \leqq 3 \quad \cdots ③$$

①②③より.

$$\therefore -2 \leqq y \leqq -\sqrt{3},\quad \sqrt{3} \leqq y \leqq 2$$

以上より

$$-2 \leqq y \leqq 2$$

$X(=x^2)$ について解くと.

$$X = -(y^2-9) \pm \sqrt{(y^2-9)^2-(y^4+18y^2-63)}$$
$$= -(y^2-9) \pm \sqrt{144-36y^2}$$
$$= -(y^2-9) \pm 6\sqrt{4-y^2}$$

よって

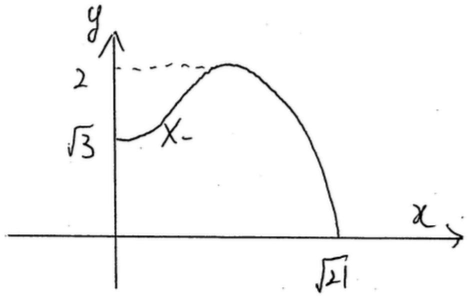
$$X_+ = -(y^2-9) + 6\sqrt{4-y^2}$$
$$X_- = -(y^2-9) - 6\sqrt{4-y^2}$$

とおくと. X_+ は y の単調増加関数, X_- は $y^2=Y$ とおくと

$$X_- = -Y+9-6\sqrt{4-Y}$$

$$\frac{dX_-}{dY} = -1 - 6\cdot\frac{1}{2}(4-Y)^{-\frac{1}{2}}(-1)$$
$$= -1 + 3\frac{1}{\sqrt{4-Y}} > 0 \quad (0<Y<2)$$

となるので、単調減少関数. よってグラフは次のようになっている.

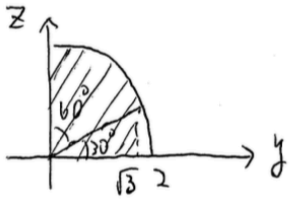


よって求める体積をVとすると.

$$X + \frac{V}{2} = \pi\int_0^2 X_+\,dy - \pi\int_{\sqrt{3}}^2 X_-\,dy$$
$$= \pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(-y^2+9+6\sqrt{4-y^2}\right)dy$$
$$+\pi\int_{\sqrt{3}}^2 12\sqrt{4-y^2}\,dy$$
$$= \pi\int_0^{\sqrt{3}}(9-y^2)\,dy + 6\pi\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-y^2}\,dy$$
$$+12\pi\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-y^2}\,dy$$

ここで,

$$\underline{\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-y^2}\,d} = \pi\times2^2\times\frac{1}{6}+\sqrt{3}\times1\times\frac{1}{2}$$
$\downarrow$
$$= \frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-y^2}\,dy = \pi\times2^2\times\frac{1}{12}-\sqrt{3}\times1\times\frac{1}{2}$$
$\downarrow$
$$= \frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$