I

A： $\frac{1}{3}$ の確率で $+1$

$\frac{2}{3}$ の確率で 0

B： $\frac{1}{9}$ の確率で $+3$

$\frac{2}{9}$ の確率で $+1$

$\frac{5}{9}$ の確率で ± 0

$\frac{1}{9}$ の確率で 元に戻る

（問１）

A は m 回勝って $n-m$ 回はあいこか負けるので

$$x_{n,m} = {}_nC_m \left(\frac{1}{3}\right)^m \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}$$

（問２）

2 回のゲームの後には B は $m=6,4,3,2,1,0$ のいずれかにいる.

$m=6$ のとき

パーで 2 回続けて勝つ： $\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81}$

$m=4$ のとき

パーで勝つ 及び グーかチョキで勝つがそれぞれ 1 回ずつ： ${}_2C_1 \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{81}$

$m=3$ のとき

1 回目にあいこまたは負けて, 2 回目にパーで勝つ： $\frac{2}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$

1 回目にパーで勝って, 2 回目にあいこまたはグーかチョキで負ける： $\frac{1}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{81}$

$$\therefore \frac{2}{27} + \frac{5}{81} = \frac{11}{81}$$

$m=2$ のとき

グーかチョキで 2 回続けて勝つ：$\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{4}{81}$

$m=1$ のとき

1 回目にあいこまたは負けて, 2 回目にグーかチョキで勝つ：$\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}=\frac{4}{27}$

1 回目にグーかチョキで勝って, 2 回目にあいこまたはグーかチョキで負ける：$\frac{2}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{10}{81}$

$$\therefore \frac{4}{27}+\frac{10}{81}=\frac{22}{81}$$

$m=0$ のとき

1 回目はなんでもあり，2 回目にパーで負ける：$\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}=\frac{4}{27}$

1 回目にパーで負けて, 2 回目にあいこまたはグーかチョキで負ける：$\frac{1}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{81}$

あいこまたはグーかチョキで負けることが 2 回続く：$\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{25}{81}$

$$\therefore \frac{1}{9}+\frac{5}{81}+\frac{25}{81}=\frac{39}{81}=\frac{13}{81}$$

以上より

i	0	1	2	3	4	5	6	7以上
y_i	$\frac{13}{27}$	$\frac{22}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{11}{81}$	$\frac{4}{81}$	0	$\frac{1}{81}$	0

(問３)

(i)　パーで負けることがないとき

B はあいこまたはグーかチョキで負けることを n 回繰り返すので $\left(\frac{5}{9}\right)^n$

(ii)　最後にパーで負けるのが k回目のとき $(1\leqq k\leqq n)$

B は始めの $k-1$ 回はなんでもあり, k回目にパーで負けて残り $n-k$ 回はあいこまたはグーかチョキで負ける

$$1^{k-1}\times\frac{1}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{n-k}$$

よって

$$
\begin{aligned}
Z_n &= \left(\frac{5}{9}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{5}{9}\right)^n + \frac{\frac{1}{9}\left\{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right\}}{1 - \frac{5}{9}} \\
&= \left(\frac{5}{9}\right)^n + \frac{1}{4}\left\{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{1 + 3\left(\frac{5}{9}\right)^n\right\}
\end{aligned}
$$

II

$$z = \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\bar{z}$$

(問１)

$z = r(\cos\theta - i\sin\theta)\quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ となるので

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) = \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$r = 0$ のときは成立. $r \neq 0$ のとき

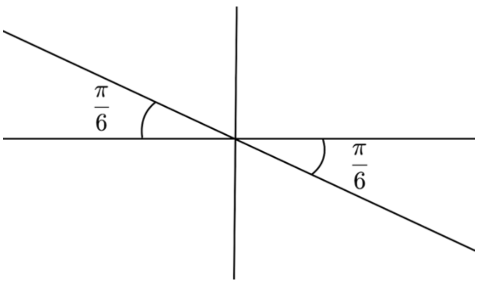
$$\begin{aligned}\cos\theta + i\sin\theta &= cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)\\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{3} - \theta\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \theta\right)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&\theta = -\frac{\pi}{3} - \theta + 2n\pi\\ \Leftrightarrow\ & 2\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{3}\\ \Leftrightarrow\ & \theta = n\pi - \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

よって, z は $\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ という直線を表す.

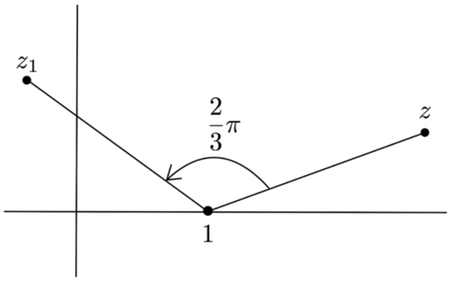


(問２)

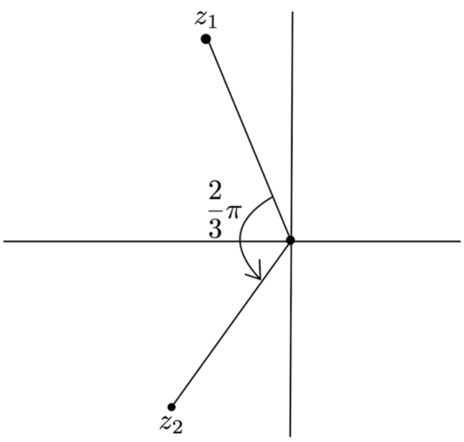
対称点を z' とおくと

$$\begin{aligned}z' &= \overline{\omega \times \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\bar{\omega}\end{aligned}$$

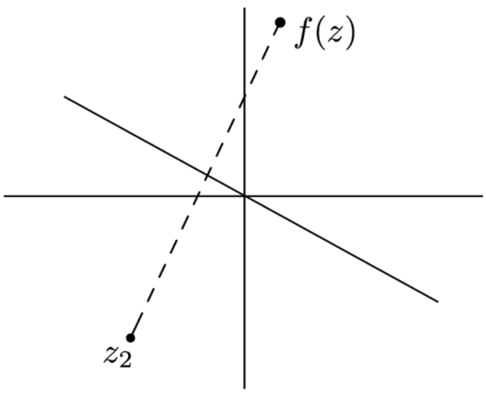
(問３)



$$z_1 - 1 = \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)(z-1)$$
$$\therefore z_1 = \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\right)(z-1)+1$$



$$\begin{aligned}
z_2 &= \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)z_1 \\
&= \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\left\{\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)(z-1)+1\right\} \\
&= \left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)(z-1) + \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) \\
&= \left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)z - \cos\frac{4}{3}\pi - i\sin\frac{4}{3}\pi + \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi \\
&= \left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)z + \sqrt{3}i
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\overline{z_2} \\
&= \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left\{\left(\cos\frac{4}{3}\pi - i\sin\frac{4}{3}\pi\right)\bar{z} - \sqrt{3}i\right\} \\
&= \left(\cos\frac{5}{3}\pi - i\sin\frac{5}{3}\pi\right)\bar{z} - \sqrt{3}i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\bar{z} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

(問４)

$$f(z)=-z-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\bar{z}-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-z-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\bar{z}=-z$$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(0\leqq\theta<2\pi)$

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)r(\cos\theta-i\sin\theta)=-r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=r\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\}$$

$r=0$ のとき成立. $r\neq 0$ のとき

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)$$

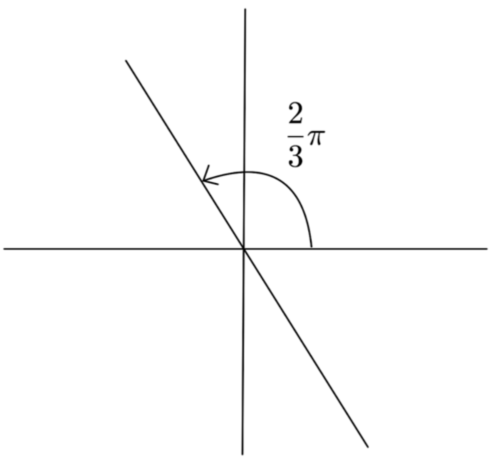
$$\theta+\pi=\frac{\pi}{3}-\theta+2k\pi \qquad k \text{ は整数}$$

$$2\theta=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi$$
$$\theta=-\frac{\pi}{3}+k\pi$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

よって



III

（問１）

$$(\text{左辺}) = [(b-a)(x-a)f'(x)]_a^b - \int \{-(x-a)+(b-x)\}\, f'(x)\, dx$$
$$= \int_a^b (2x-a-b)f'(x)\, dx$$
$$= [(2x-a-b)f(x)]_a^b - \int_a^b 2f(x)\, dx$$
$$= (b-a)f(b)-(a-b)f(a) - 2\int_a^b f(x)\, dx$$
$$= (b-a)\,(f(b)+f(a)) - 2\int_a^b f(x)\, dx = (\text{右辺})$$

（問２）

問１で $a=t,\ b=t+1,\ f(x)=logx$ とすると $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

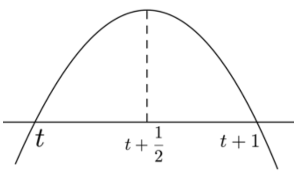
$$\int_t^{t+1} (t+1-x)(x-t)\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \log t + \log(t+1) - 2\int_t^{t+1} \log x\, dx$$
$$\Leftrightarrow \int_t^{t+1} \log x\, dx - \frac{1}{2}\{\log t + \log(t+1)\} = \frac{1}{2}\int_t^{t+1} (t+1-x)(x-t)\frac{1}{x^2}\, dx$$

$t \leqq x \leqq t+1$ において

$t+1-x \geqq 0,\quad x-t \geqq 0,\quad \dfrac{1}{x^2} > 0$ より（右辺の被積分関数）$\geqq$ 0

よって（右辺）$\geqq$ 0

また



$$(t+1-x)(x-t) \leqq \left\{t+1-\left(t+\frac{1}{2}\right)\right\}\left\{t+\frac{1}{2}-t\right\} = \frac{1}{4}$$

よって

$$\int_t^{t+1} (t+1-x)(x-t) - \frac{1}{x^2}\, dx \leqq \frac{1}{4}\int_t^{t+1} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}\right)$$

以上より

$$0 \leqq \frac{1}{2}\int_t^{t+1} (t+1-x)(x-t)\frac{1}{x^2}\, dx \leqq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq \int_t^{t+1} \log x\, dx - \frac{1}{2}\{\log t + \log(t+1)\} \leqq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)$$

(問３)

$t=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$ とし，それらの和をとると

$$0 \leqq \int_1^n \log x\, dx - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\{\log k + \log(k+1)\} \leqq \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq n\log n - n - \sum_{k=1}^{n}\log k + \frac{1}{2}\log n \leqq \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq n\log n - n - \log n! + \frac{1}{2}\log n \leqq \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq \frac{1}{2}\log n - a_n \leqq \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$\log n$ で割って

$$0 \leqq \frac{1}{2} - \frac{a_n}{\log n} \leqq \frac{1}{8\log n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

ここで右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．よってはさみうちの定理より

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{a_n}{\log n}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n}=\frac{1}{2}$$

IV

（問１）

$$_pC_j = \frac{p!}{j!(p-j)!}$$

$j,\ p-j$ はいずれも p より小さい自然数なので, $j!,\ (p-j)!$ はいずれも p を素因数に持たない.
したがって分子の p は p 以下のいかなる数にも割れないので, $_pC_j$ は p の倍数.

（問２）

$$(m+1)^p = \sum_{k=0}^{p} {}_pC_k m^k$$

よって

$$(m+1)^p - m^p - 1 = \sum_{k=1}^{p-1} {}_pC_k m^k$$

ここで、各 $_pC_k$ は $0<k<p$ なので, 問１より p の倍数
よって $(m+1)^p - m^p - 1$ は p で割り切れる

（問３）

問２より

$$(m+1)^p - m^p - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

と表される.

$$\therefore (m+1)^p - (m^p - m) - (m+1) \equiv 0 \pmod{p}$$
$$\Leftrightarrow (m+1)^p - (m+1) \equiv m^p - m \pmod{p}$$

ここで
$m=1$ のとき $1^p - 1 = 0$ は p で割り切れる.
$m=k$ のとき $k^p - k \equiv 0 \pmod{p}$ とすると $m=k+1$ のとき

$$(k+1)^p - (k+1) \equiv k^p - k \equiv 0 \pmod{p}$$

となり, m $=k+1$ のときも p で割り切れる. よって示された.

$$m^p - m = m(m^{p-1} - 1)$$

m が p で割り切れないとき, $m^p - m$ が p で割り切れるので, $m^{p-1} - 1$ が p で割り切れる.

（問４）

$$a = 4n^2 + 4n - 1$$
$$= (2n+1)^2 - 2$$

a と $2n+1$ が共通素因数 p をもつとする $(p>1)$

$$a = a'p$$
$$2n+1 = pn' \qquad (a',\ n' \text{ は自然数})$$

このとき

$$a'p = p^2n'^2 - 2$$
$$\Leftrightarrow 2 = p(pn'^2 - a')$$

よって p は 2 の約数かつ 1 より大きい素数なので，$p = 2$ となる．

これより a が 2 の倍数となるが，$a = 4n(n+1) - 1$ は奇数なので矛盾する．

よって a と $2n+1$ は共通の素因数をもたず，互いに素

(問５)

$$a = 4n^2 + 4n - 1 = (2n+1)^2 - 2 \equiv 0 \pmod{p} \quad \cdots (*)$$

と表される．問４より $2n+1$ は p では割り切れない．

よって 問３より

$$(2n+1)^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

となる．(∗)より $(2n+1) = (2+kp)^{\frac{1}{2}}$ を代入

$$(2+kp)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} {}_{\frac{p-1}{2}}C_j 2^j (kp)^{\frac{p-1}{2}-j} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$2^{\frac{p-1}{2}} + \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}-1} {}_{\frac{p-1}{2}}C_j 2^j (kp)^{\frac{p-1}{2}-j} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = k'p - \sum_{j=0}^{\frac{p-3}{2}} {}_{\frac{p-1}{2}}C_j 2^j (kp)^{\frac{k-1}{2}-j}$$
$$= p\left\{k' - \sum_{j=0}^{\frac{p-3}{2}} {}_{\frac{p-1}{2}}C_j 2^j k^{\frac{k-1}{2}-j} p^{\frac{k-3}{2}-j}\right\} \equiv 0 \pmod{p}$$

となるので，$2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は p で割り切れる．