

I

(1)

$$\begin{aligned}
 & (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} \\
 &= (-1)^n \left[\frac{1}{x+1} - 1 - \frac{(-x) \{1 - (-x)^{n-1}\}}{1 - (-x)} \right] \\
 &= (-1)^n \frac{1}{x+1} \{1 - (x+1) + x - x(-x)^{n-1}\} \\
 &= (-1)^n \frac{1}{x+1} (-1)^n x^n \\
 &= \frac{x^n}{x+1}
 \end{aligned}$$

よって, $\frac{x^n}{x+1} - \frac{1}{2}x^n = \frac{1-x}{2(x+1)}x^n \geq 0 \quad (\because 0 \leq x \leq 1)$

$$\begin{aligned}
 & x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} - \frac{x^n}{x+1} \\
 &= \frac{1}{2(x+1)} \{2(x+1) - x(x+1) - 2\} x^n \\
 &= \frac{1}{2(x+1)} (x - x^2) x^n = \frac{1-x}{2(x+1)} x^{n+1} \geq 0 \quad (\because 0 \leq x \leq 1)
 \end{aligned}$$

(2)

(1) の不等式を 0 から 1 までで積分すると

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \frac{1}{2}x^n dx \leq (-1)^n \int_0^1 \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} dx \leq \int_0^1 \left(x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} \right) dx \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2(n+1)} \leq (-1)^n \left[\log|x+1| - x - \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right]_0^1 \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2(n+1)} \leq (-1)^n \left(\log 2 - 1 - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2(n+1)} \leq (-1)^n \left\{ \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right\} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2(n+1)} \leq (-1)^n \{ \log 2 - a_n \} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} \\
 \therefore & \frac{n}{2(n+1)} \leq (-1)^n n \{ \log 2 - a_n \} \leq n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \right) = \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}
 \end{aligned}$$

ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$ なるので

はさみうちの定理より $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n (\log 2 - a_n) = \frac{1}{2}$, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n (a_n - \log 2) = -\frac{1}{2}$

II

$$\begin{aligned} |2\vec{OA} + \vec{OB}| &= |\vec{OA} + 2\vec{OB}| = 1 \\ (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} &(2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OB}) + |2\vec{OA} + \vec{OB}|^2 \\ &= (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OB} + 2\vec{OA} + \vec{OB}) \\ &= (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot 3(\vec{OA} + \vec{OB}) = 3 \times \frac{1}{3} = 1 \end{aligned}$$

よって $(2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OB}) = 1 - 1^2 = 0$

(2)

$\vec{OC} = 2\vec{OA} + \vec{OB}$, $\vec{OD} = \vec{OA} + 2\vec{OB}$ とおくと

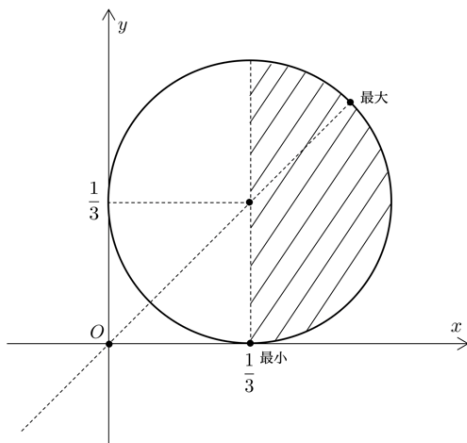
$$|\vec{OC}| = |\vec{OD}| = 1, \quad \vec{OC} \cdot \vec{OD} = 0$$

このとき P は

$$\left| \vec{OP} - \frac{\vec{OC} + \vec{OD}}{3} \right| \leq \frac{1}{3} \text{ かつ } \vec{OP} \cdot \vec{OC} \leq \frac{1}{3} \text{ となる}$$

ここで, $\vec{OC} = (1, 0)$, $\vec{OD} = (0, 1)$, $\vec{OP} = (X, Y)$ とおくことができるので

$$\begin{aligned} \left| \vec{OP} - \frac{\vec{OC} + \vec{OD}}{3} \right| &\leq \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 &\leq \frac{1}{9} \\ \vec{OP} \cdot \vec{OC} \leq \frac{1}{3} &\Leftrightarrow X \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$



となるのでこれをみたす領域は左図のようになる

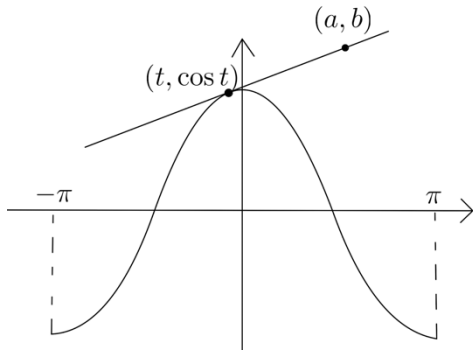
よって, $|\vec{OP}|$ の最大値は $\vec{OP} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \right)$

のときで, $\frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$

$|\vec{OP}|$ の最小値は $\vec{OP} = \left(\frac{1}{3}, 0 \right)$ のときで $\frac{1}{3}$



III



$$y = \cos x$$

$$y' = -\sin x$$

(t, cos t)における接線は

$$y - \cos t = -\sin t(x - t)$$

これが P を通る

$$b = -\sin t(a - t) + \cos t$$

ここで

$$f(t) = (t - a) \sin t + \cos t$$

とすると

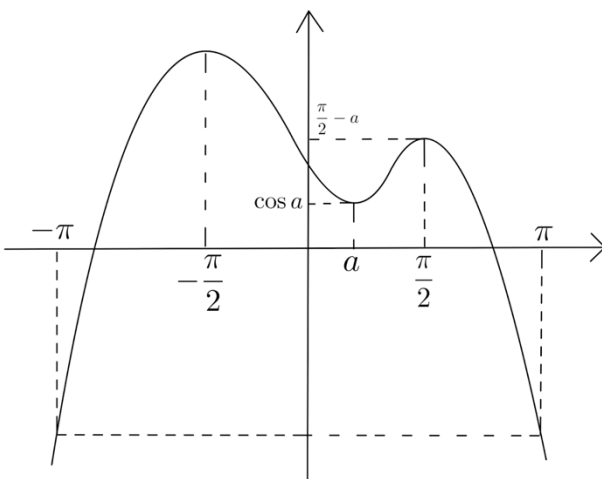
$$f'(t) = \sin t + (t - a) \cos t - \sin t$$

$$= (t - a) \cos t \quad (0 < a < \pi)$$

$0 < a < \frac{\pi}{2}$ のとき,

増減表は

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		a		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(t)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(t)$	-1	↗	$\frac{\pi}{2} + a$	↘	$\cos a$	↗	$\frac{\pi}{2} - a$	↘	-1



$y = f(t)$ と $y = b$ が異なる 4 点で交わるのは

$$\cos a < b < \frac{\pi}{2} - a$$

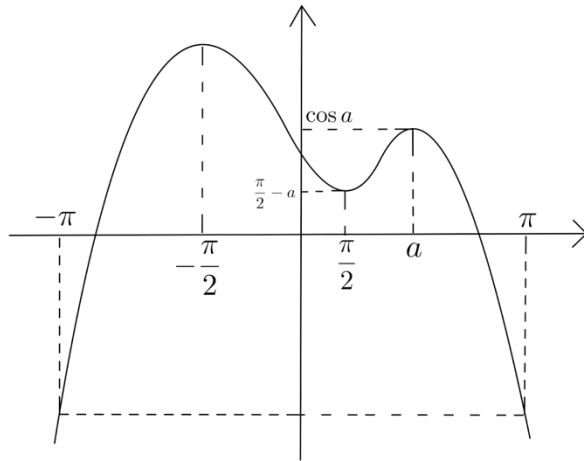
異なる接線には異なる接点に対応するのでこれが $N(P) = 4$ となる条件である.



$\frac{\pi}{2} < a < \pi$ のとき,

増減表

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		a		π
$f'(t)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(t)$	-1	↗	$\frac{\pi}{2} + a$	↘	$\frac{\pi}{2} - a$	↗	$\cos a$	↘	-1

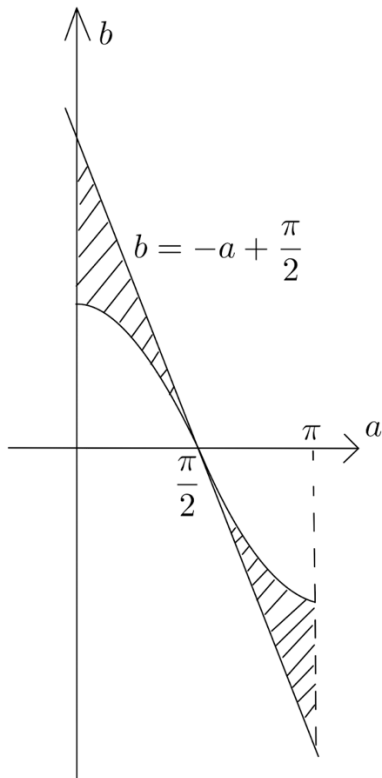


先程と同様に

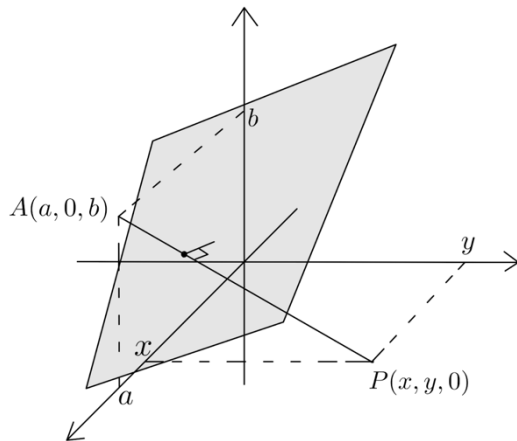
$N(P) = 4$ となるのは

$$\frac{\pi}{2} - a < b < \cos a$$

以上より 求める範囲は



IV



$\vec{AP} = (x - a, y, -b)$ より α の方程式は
 $(x - a)X + yY - bZ = 0$

(1)

Q は直径 AP 上に存在するので

$$\vec{AQ} = k\vec{AP} \quad (k \text{ は実数})$$

よって

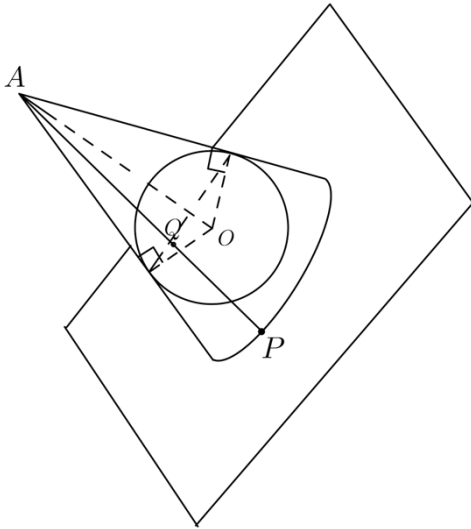
$$(\vec{AP} \cdot \vec{AQ})^2 = (\vec{AP} \cdot k\vec{AP})^2 = k^2 |\vec{AP}|^4$$

$$|\vec{AP}|^2 |\vec{AQ}|^2 = |\vec{AP}|^2 \cdot |k\vec{AP}|^2 = k^2 |\vec{AP}|^4$$

よって成立.



(2)



$|\vec{OQ}| = 1$ をみたすので

O を中心とする半径 1 の球を考え, A から球と内接するような円錐を考えると, 円錐との交点が Q の軌跡であり, 円錐側面と XY 平面が交わる線が P の軌跡となる.

$$\vec{AO} = (-a, 0, -b), \quad \angle OAQ = \theta \quad \text{とすると}$$

$$\cos \theta = \frac{AQ}{OA} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

円錐側面上の任意の点を $R(X, Y, Z)$ とすると

$$\vec{AO} \cdot \vec{AR} = |\vec{AO}| |\vec{AR}| \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow (-a, 0, -b)(X - a, Y, Z - b)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{(X - a)^2 + Y^2 + (Z - b)^2} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$-a(X - a) - b(Z - b) = \sqrt{a^2 + b^2 - 1} \sqrt{(X - a)^2 + Y^2 + (Z - b)^2}$$

$$\therefore \{a(X - a) + b(Z - b)\}^2 = (a^2 + b^2 - 1) \{(X - a)^2 + Y^2 + (Z - b)^2\}$$

X-Y 平面と交わる線は $Z=0$ として

$$\{a(X - a) - b(Z - b)\}^2 = (a^2 + b^2 - 1) \{(X - a)^2 + Y^2 + b^2\}$$

$$aX - (a^2 + b^2)$$

$$a^2 X^2 - 2a(a^2 + b^2)X + (a^2 + b^2)^2$$

$$= (a^2 + b^2 - 1)(X - a)^2 + (a^2 + b^2 - 1)Y^2 + b^2(a^2 + b^2 - 1)$$

$$= (a^2 + b^2 - 1)X^2 - 2a(a^2 + b^2 - 1)X + (a^2 + b^2 - 1)Y^2 + (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 1)$$

$$(b^2 - 1)X^2 + 2aX + (a^2 + b^2 - 1)Y^2 = a^2 + b^2$$

$$(b^2 - 1) \left\{ X^2 + \frac{2a}{b^2 - 1} X \right\} + (a^2 + b^2 - 1)Y^2 = a^2 + b^2$$

$$(b^2 - 1) \left(X + \frac{a}{b^2 - 1} \right)^2 + (a^2 + b^2 - 1)Y^2 = a^2 + b^2 + \frac{a^2}{b^2 - 1}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{b^2 - 1} + b^2$$

$$= b^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2 - 1} \right)$$

$$= \frac{b^2(a^2 + b^2 - 1)}{b^2 - 1}$$

$$\frac{(b^2 - 1)^2}{b^2(a^2 + b^2 - 1)} \left(X + \frac{a}{b^2 - 1} \right)^2 + \frac{b^2 - 1}{b^2} Y^2 = 1$$

$b < -1, 1 < b$ のとき楕円

$$\frac{\left(X + \frac{a}{b^2 - 1} \right)^2}{\left(\frac{b\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{b^2 - 1} \right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}} \right)^2} = 1$$

$-1 < b < 1$ のとき双曲線

$$\frac{\left(X + \frac{a}{b^2 - 1} \right)^2}{\left(\frac{b\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{b^2 - 1} \right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}} \right)^2} = 1$$

$b = \pm 1$ のとき放物線

$$2aX + a^2Y^2 = a^2 + 1$$

$$a^2Y^2 = -2aX + a^2 + 1$$

$$Y^2 = -\frac{2}{a}X + \frac{a^2 + 1}{2a}$$

$$= -\frac{2}{a} \left(X - \frac{a^2 + 1}{2a} \right)$$

$$= 4 \left(-\frac{1}{2a} \right) \left(X - \frac{a^2 + 1}{2a} \right)$$



V

(1)

$$P_1 : b_1 = a_1^{1-1} a_1 = a_1 \text{が } 7 \text{ の倍数}$$

$$P_2 : b_2 = a_1^{2-1} a_1 + a_1^{2-2} a_2 = a_1^2 + a_2 \text{が } 7 \text{ の倍数}$$

$$a_1^2 : 1, 4, 9, 16, 25, 36$$

$$: 1, 4, 2, 2, 4, 1$$

$$a_2 : 6, 3, 5, 5, 3, 6$$

(2)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} a_1^{n+1-k} a_k \\ &= a_1 \sum_{k=1}^{n+1} a_1^{n-k} a_k \\ &= a_1 \left(\sum_{k=1}^n a_1^{n-k} a_k + a_1^{-1} a_{n+1} \right) \\ &= a_1 \sum_{k=1}^n a_1^{n-k} a_k + a_{n+1} \\ &= a_1 b_n + a_{n+1} \end{aligned}$$

よって b_n が 7 の倍数のとき $a_1 b_n$ は 7 の倍数であり $a \geq a_{n+1} \geq 6$ であるから b_{n+1} は 7 の倍数になることはない。

b_n が 7 の倍数でないとき $a_1 b_n$ も 7 の倍数ではないで $a_1 b_n$ を 7 で割った余りを r とすると $a_{n+1} = 7 - r$ のときのみ b_{n+1} は 7 の倍数になる。

したがって

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1 - p_n) \times \frac{1}{6} \\ &= -\frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} \quad (p_1 = 0) \\ \therefore p_{n+1} - \frac{1}{7} &= -\frac{1}{6} \left(p_n - \frac{1}{7} \right) \\ p_n - \frac{1}{7} &= \left(0 - \frac{1}{7} \right) \cdot \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1} \\ \therefore p_n &= \frac{1}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1} \right\} \end{aligned}$$