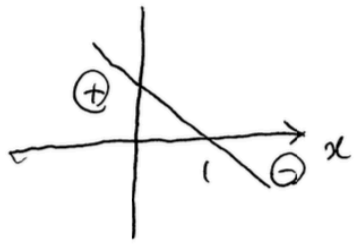
$\boxed{1}$ (1) $f(x) = \dfrac{x}{e^x} = xe^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x})$

$= (1-x)e^{-x}$



x	$-\infty$		1		2		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{2}{e^2}$	↘	0

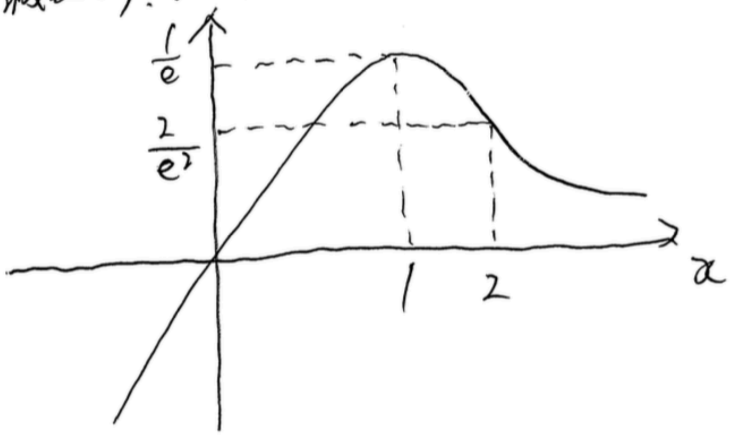
$$f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x})$$
$$= (x-2)e^{-x}$$

また

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = -\infty$$

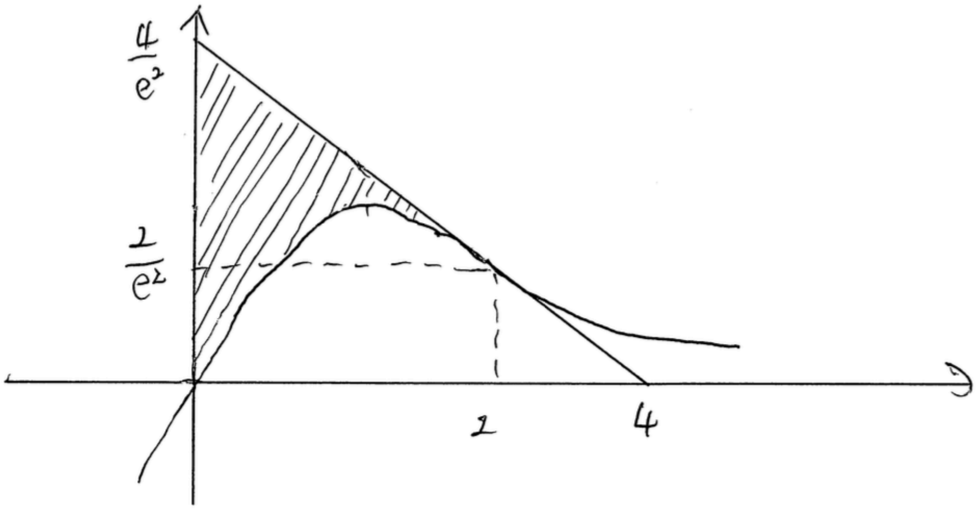
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

増減表より、グラフは.



(2) $f'(2)=\frac{-1}{e^2}$ より 接線の方程式は.

$$y=-\frac{1}{e^2}(x-2)+\frac{2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$$



よって求める面積は

$$\left(\frac{2}{e^2}+\frac{4}{e^2}\right)\times 2\times\frac{1}{2}-\int_0^2 xe^{-x}dx$$

$$=\frac{6}{e^2}-\left\{\left[-xe^{-x}\right]_0^2+\int_0^2 e^{-x}dx\right\}$$

$$=\frac{6}{e^2}-\left\{-2e^{-2}-\left[e^{-x}\right]_0^2\right\}$$

$$=\frac{8}{e^2}+(e^{-2}-1)=\frac{9}{e^2}-1$$

(3)　$y=f(x)$ のグラフより、$f(x)$ の各接線は 接点で1対1に対応する

よって $(0,\alpha)$ からひいた接線が $y=f(x)$ と異なる3つの接点をもつ条件を求めればよいことがわかる

接点を $\left(t, \frac{t}{e^t}\right)$ とすると 接線の方程式は、

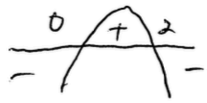
$$y=(1-t)e^{-t}(x-t)+te^{-t}$$
$$=(1-t)e^{-t}x+t^2e^{-t}$$

これが $(0,\alpha)$ を通るので

$$\alpha=t^2e^{-t}$$

左辺を $g(t)$ とすると $y=g(t)$ と直線 $y=\alpha$ が異なる3つの交点をもてばよい

$$g'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}$$
$$=t(2-t)e^{-t}$$

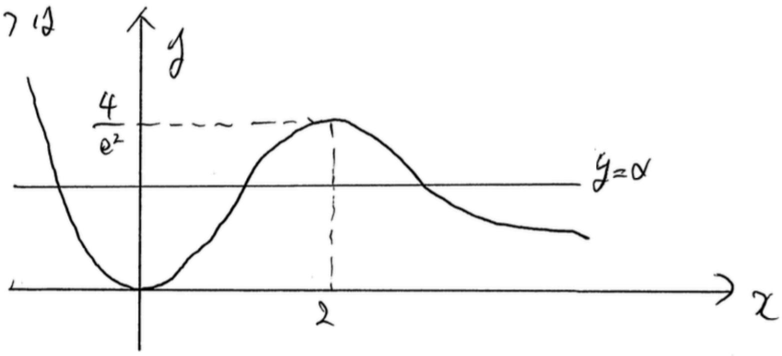


$$\lim_{t\to-\infty} t^2e^{-t}=+\infty,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t}=0$$

よって増減表は

t	$-\infty$		0		2		∞
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

グラフは



よって求める条件は

$$0<\alpha<\frac{4}{e^2}$$

$\boxed{2}$ (i) $f(0)=1$

(ii) $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = a\sin x + b\cos x$

(1) (ii)式において $x=0$ として

$0=b$

また両辺を微分すると、

$f(x)-f(-x)\times(-1)=a\cos x - b\sin x$

$\Leftrightarrow\ f(x)+f(-x)=a\cos x \quad \cdots ①$

$x=0$ を代入して

$1+1=a$

$\therefore\ a=2.$

(2) $g(x)=f(x)-\cos x$

①は $f(x)+f(-x)=2\cos x$

$\Leftrightarrow\ f(x)=-f(-x)+2\cos x$

$\therefore\ g(-x)=f(-x)-\cos(-x)$

$= -f(x)+2\cos x-\cos x$

$= -f(x)+\cos x = -g(-x)$

(3)

$$\int_{-x}^{x}\{f(t)\}^2dt=\int_{-x}^{x}\{g(t)+\cos t\}^2dt$$
$$=\int_{-x}^{x}\{g(t)\}^2dt+2\int_{-x}^{x}g(t)\cos t\,dt+\int_{-x}^{x}\cos^2t\,dt$$

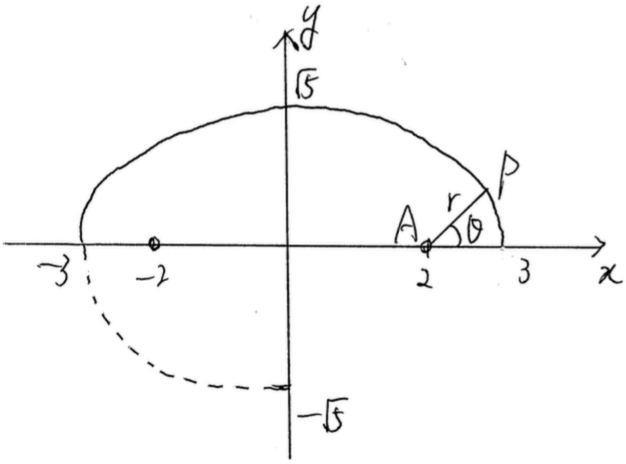
$$\therefore \int_{-x}^{x}\{f(t)\}^2dt-\int_{-x}^{x}\cos^2t\,dt=\int_{-x}^{x}\{g(t)\}^2dt+2\int_{-x}^{x}g(t)\cos t\,dt$$

ここで $g(t)$ は奇関数，$\cos t$ は偶関数なので $g(t)\cos t$ は奇関数

したがって右辺第2項の値は 0　これより

$$\int_{-x}^{x}\{f(t)\}^2dt-\int_{-x}^{x}\cos^2t\,dt=\int_{-x}^{x}\{g(t)\}^2dt\geqq 0$$

$\boxed{3}$ (1)



P(x, y) は r, θ を用いると.

$$\begin{cases} x = 2 + r\sin\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad y > 0 \text{ より } (0 < \theta < \pi)$$

これを 楕円の式に代入

$$\frac{(2 + r\cos\theta)^2}{9} + \frac{r^2\sin^2\theta}{5} = 1$$

$$r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{9} + \frac{\sin^2\theta}{5}\right) + \frac{4\cos\theta}{9}r + \frac{4}{9} - 1 = 0$$

$$(5\sin^2\theta + 9\sin^2\theta)r^2 + 20\cos\theta r - 25 = 0$$

$$(9 - 4\cos^2\theta)r^2 + 20\cos\theta \cdot r - 25 = 0$$

$$\{(3 - 2\cos\theta)r + 5\}\{(3 + 2\cos\theta)r - 5\} = 0$$

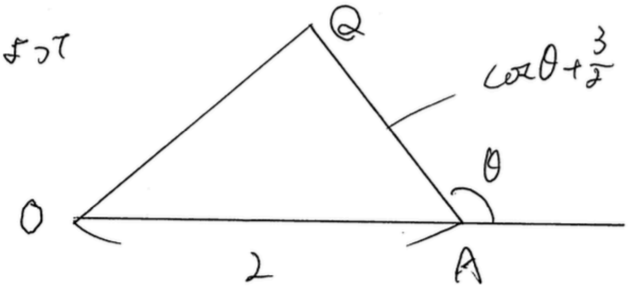
$3 - 2\cos\theta \geqq 1$, $r > 0$ より $(3 - 2\cos\theta)r + 5 > 0$

$$\therefore (3 + 2\cos\theta)r - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{5}{2\cos\theta + 3} \qquad (0 < \theta < \pi)$$

(2) $AP = r$ より $AQ = \dfrac{5}{2r} = \dfrac{2\cos\theta + 3}{2} = \cos\theta + \dfrac{3}{2}$

よって



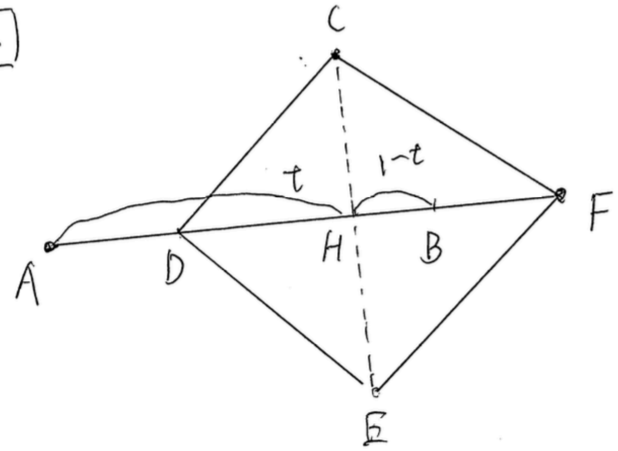
$$\begin{aligned} OQ^2 &= 2^2 + \left(\cos\theta + \tfrac{3}{2}\right)^2 + 4\cos\theta\left(\cos\theta + \tfrac{3}{2}\right) \\ &= 5\cos^2\theta + 9\cos\theta + \tfrac{25}{4} \\ &= 5\left(\cos\theta + \tfrac{9}{10}\right)^2 - \tfrac{81}{20} + \tfrac{25}{4} \\ &= 5\left(\cos\theta + \tfrac{9}{10}\right)^2 + \tfrac{44}{20} \\ &= 5\left(\cos\theta + \tfrac{9}{10}\right)^2 + \tfrac{11}{5} \end{aligned}$$

$0 < \theta < \pi$ より $-1 < \cos\theta < 1$

よって $\cos\theta = -\dfrac{9}{10}$ のとき OQ^2 の最小値は $\dfrac{11}{5}$

∴ 最小値は $\sqrt{\dfrac{11}{5}}$ //

4



Cから ABに下ろした垂線の足をHとする.

$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 3) - (-1, -5, 9)$

$= (2, 3, -6)$

$\overrightarrow{OH} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$

$= (1-t)(-1, 5, 9) + t(1, -2, 3)$

$= (2t-1, 3t-5, -6t+9)$

$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = (2t-2, 3t-24, -6t+20)$

$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ より

$(2t-2, 3t-24, 6t+20)(2, 3, -6) = 0$

$2(2t-2) + 3(3t-24) - 6(-6t+20) = 0$

$49t = 196$

$\therefore t = 4$

これより. $\overrightarrow{OH} = (7, 7, -15)$

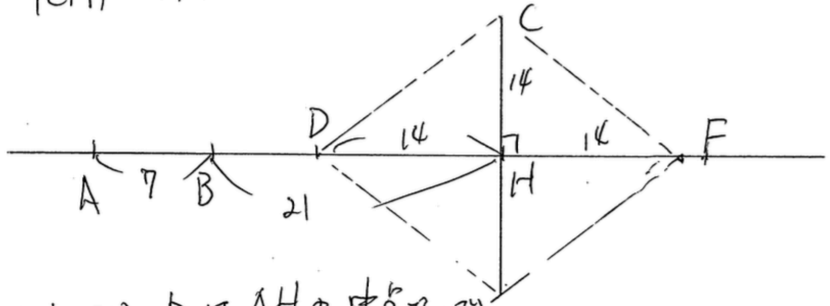
$\overrightarrow{CH} = (6, -12, -4)$ より $|\overrightarrow{CH}| = 14$

$|\overrightarrow{AD}| = 7$

$\therefore \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = (13, -5, -19)$

(2)　$t=4$ より　A, B, H はこの順に並び、AB:BH = 1:3

また
$|CH|=14$, $|AB|=7$ より $|BH|=21$



これより D は AH の中点なので

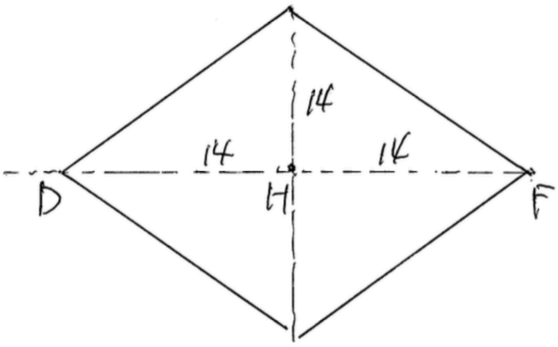
$(3, 1, -3)$

F は AH を 3:1 に外分する点なので

$$\frac{3(7, 7, -15)-(-1, -5, 9)}{2}$$

$$=(11, 13, -27)$$

(3)



求める回転体は円錐を2つ重ねた形をしているので

$$\pi\times14^2\times14\times\frac{1}{3}\times2$$

$$=\frac{5488}{3}\pi$$

5

(1) $f(x)$ が既約でないとする、すなわち

$$f(x)=g(x)\times h(x) \qquad g(x),\ f(x):x\text{の整数係数の多項式}$$

で表されるとすると、

$$f(x+1)=g(x+1)\times h(x+1)$$

となる

$g(x+1)$, $h(x+1)$ は $x+1$ の整数係数の多項式であるので

任意の非負の整数 k に対して

$$(x+1)^k=\sum_{\ell=0}^{k} {}_kC_\ell\, x^\ell$$

も整数係数の多項式で展開できるので $g(x+1)$, $h(x+1)$ も

整数係数の多項式である

よって対偶をとって題意は証明された。

(2) $f(x)$ が既約でないとする。このとき $f(x)$ は少なくとも1つは

1次式の積で表わされる これを $mx-n$ とする (m, n は整数、互いに素)

$$f(x)=(mx-n)g(x) \qquad g(x)\text{は2次式}$$

このとき $f\left(\frac{n}{m}\right)=0$ となるので

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=a\frac{n^3}{m^3}+a_2\frac{n^2}{m^2}+a_1\frac{n}{m}+a_0=0$$

$$\Leftrightarrow\ a_3n^3+a_2mn^2+a_1m^2n+a_0m^3=0$$

$$\Leftrightarrow\ a_3n^3=-m(a_2n^2+a_1mn+a_0m^2)$$

ここで a_0, a_1, a_2 はすべて p の倍数なので a_3n^3 は p の倍数

a_3 は p の倍数でないので n^3 が p の倍数、p は素数なので n が p の倍数となる。

$n=pn'$ とおく (n' は整数) これを代入して、

$$a_3p^3n'^3+a_2p^2mn'^2+a_1pm^2n'+a_0m^3=0$$

$$\Leftrightarrow\ a_0m^3=-p(a_3p^2n'^3+a_2pmn'^2+a_1m^2n')$$

a_1, a_2 は p の倍数であるので右辺は p^2 の倍数である。
一方 a_0 は p の倍数であるが p^2 の倍数ではないので m^2 が p の倍数でなければならない。p は素数なので m が p の倍数
これは m, n が互いに素であることに反する。よって背理法より証明された。