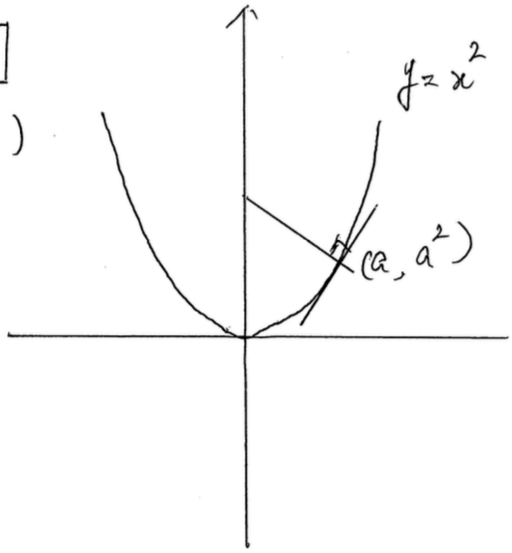
1

(1)



$y=x^2$ より その微分は $y'=2x$

よって求める直線の法線ベクトルは $(1, 2a)$

よって

$$1\cdot(x-a)+2a(y-a^2)=0$$

$$\Leftrightarrow\ x+2ay-2a^3-a=0$$

(2) Aにおける法線の方程式は

$$x+2ay=2a^3+a$$

同様にBにおける法線の方程式は

$$x+2by=2b^3+b$$

$$\therefore\ 2(b-a)y=2(b^3-a^3)+(b-a)$$

$b\neq a$ より、Pのy座標は

$$y=(b^2+ab+a^2)+\frac{1}{2}$$

$b\to a$ としてQのy座標は

$$y=3a^2+\frac{1}{2}$$

このとき

$$\begin{aligned} x &= -2ay+2a^3+a \\ &= -2a\left(3a^2+\frac{1}{2}\right)+2a^3+a \\ &= -4a^3 \end{aligned}$$

$$\therefore\ Q\left(-4a^3,\ 3a^2+\frac{1}{2}\right)$$

(3) Qの描く曲線は $x=-4a^3$ より $\dfrac{dx}{da}=-12a^2$

$y=3a^2+\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{dy}{da}=6a$

よって

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2}\,da=\int_{-1}^{1}\sqrt{(-12a^2)^2+(6a)^2}$$

$$=2\int_0^1 6\sqrt{4a^4+a^2}\,da$$

$$=12\int_0^1 a\sqrt{4a^2+1}\,da \quad \cdots(*)$$

$b=\sqrt{4a^2+1}$ とおくと

a	$0\to1$
b	$1\to\sqrt{5}$

$b^2=4a^2+1$

$\therefore 2b\,db=8a\,da$

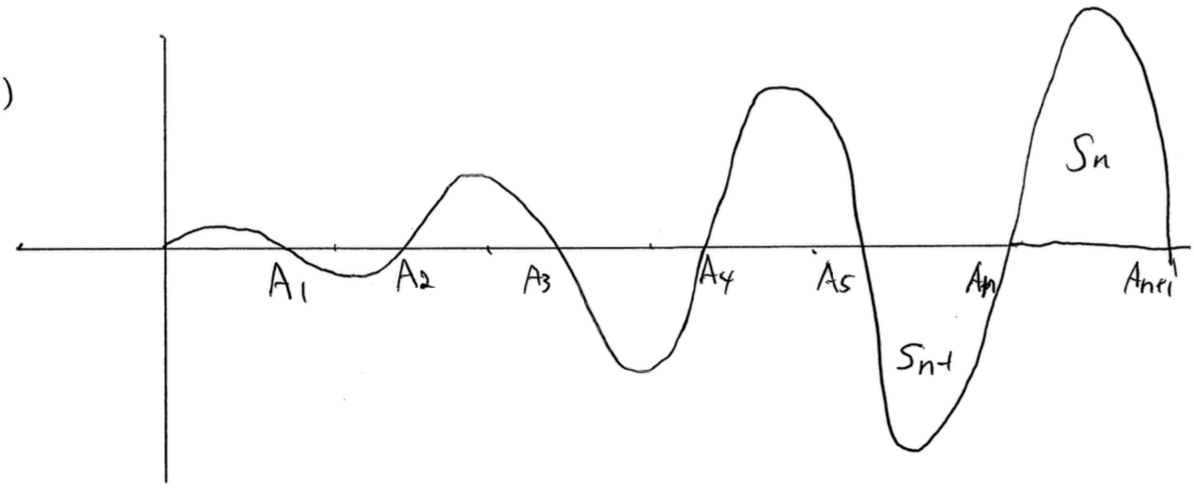
$\Leftrightarrow 4a\,da=b\,db$

よって

$$(*)=3\int_1^{\sqrt5} b\cdot b\,db=\left[b^3\right]_1^{\sqrt5}=\underline{5\sqrt5-1}$$

$\boxed{2}$

(1)



a_n については

$$e^{a_n}\sin(e^{a_n})=0$$

$$e^{a_n}=n\pi$$

$$\therefore\ a_n=\log n\pi$$

$$\therefore\ S_n=\left|\int_{a_n}^{a_{n+1}}e^x\sin(e^x)\,dx\right|$$

$$=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^x\sin(e^x)\,dx\right|$$

$t=e^x$ とすると.

$$e^x dx=dt$$

x	$\log n\pi \to \log(n+1)\pi$
t	$n\pi \to (n+1)\pi$

$$S_n=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin t\,dt\right|=2$$

(2) $f'(x) = e^x\left(\sin e^x + e^x \cos e^x\right)$ より

$$f'(a_n) = e^{a_n}\left\{\sin(e^{a_n}) + e^{a_n}\cos(e^{a_n})\right\}$$

$$= n\pi\left(\sin n\pi + n\pi\cos n\pi\right)$$

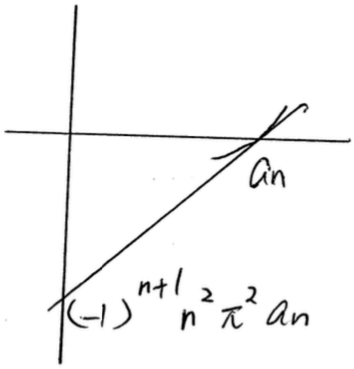
$$= (-1)^n n^2\pi^2$$

よって A_n における接線の方程式は

$$y = (-1)^n n^2\pi^2(x - a_n) + e^{a_n}\sin(e^{a_n})$$

$x = 0$ のとき

$$y = (-1)^{n+1} n^2\pi^2 a_n$$



よって

$$T_n = \frac{1}{2} a_n \left|(-1)^{n-1} n^2\pi^2 a_n\right|$$

$$= \frac{1}{2} n^2\pi^2 a_n^2$$

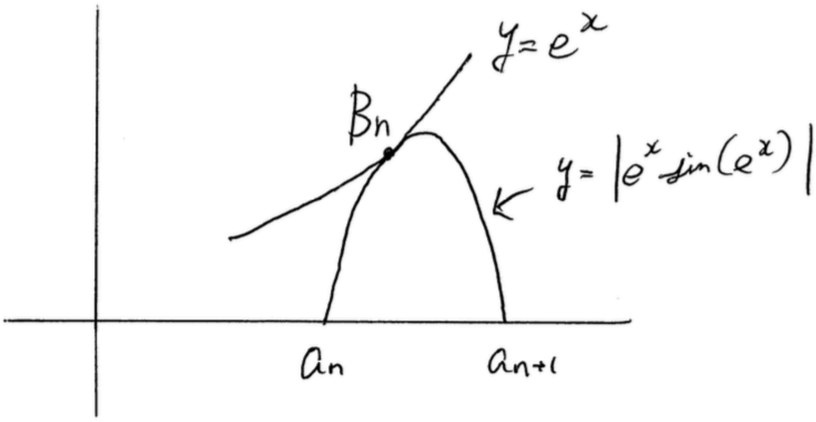
$$= \frac{1}{2} n^2\pi^2 \{\log(n\pi)\}^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_{n+1}}{T_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(n+1)^2\pi^2\{\log(n+1)\pi\}^2}{\frac{1}{2}n^2\pi^2\{\log(n\pi)\}^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left\{\frac{\log(n+1)\pi}{\log(n\pi)}\right\}^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left\{\frac{\frac{n+1}{n} + \log\pi}{1 + \frac{\log\pi}{\log n}}\right\}^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left\{\frac{1 + \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n} + \frac{\pi}{\log n}}{1 + \frac{\log\pi}{\log n}}\right\}^2 = 1$$



$$|f(x)|=e^x \iff e^x|\sin(e^x)|=e^x$$
$$\iff |\sin(e^x)|=1$$
$$\iff e^x=n\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\iff x=\log\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

よって $B_n\left(\log\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ となるので

$$U_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)\times\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$
$$=\frac{1}{2}\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\log(n+1)\pi-\log n\pi\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\pi\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}U_n=\frac{1}{2}\pi\left\{\log e+0\right\}=\frac{1}{2}\pi$$

$\boxed{3}$

(1) $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$　(a_kは実数 $k=0,1,2\cdots n$)

とおく α は $f(x)=0$ の解なので.

$$f(\alpha)=\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k=0$$

両辺共役をとって.

$$\overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k}=\overline{0}=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \alpha^k}=0$$

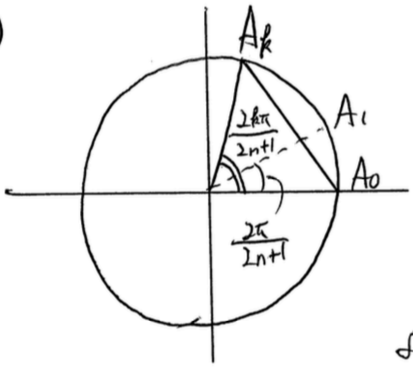
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\alpha^k}=0 \quad (a_k \text{は実数})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{\alpha})^k=0$$

$$\Leftrightarrow f(\overline{\alpha})=0$$

よって $\overline{\alpha}$ も解である.

(2)



$\alpha=\cos\frac{2\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2\pi}{2n+1}$ とおく.

$A_0=1$ とし. 反時計回りに $A_1, A_2, \cdots A_{2n}$ をとると.

$A_k:\left(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}\right)=\alpha^k$

このとき 正$(2n+1)$角形は x軸対称な図形である

よって A_k と A_{2n+1-k} は互いに共役な位置にある.
$(k=1,2,\cdots n)$

$\therefore \left|(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{2n})\right|=\left|(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^n)\right|^2=L^2$

よって求める長さの弦Lは.

$L^2=\left|(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^k)\cdots(1-\alpha^{2n})\right|$

一方 $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{2n}$ は単位円の $(2n+1)$ 等分なので、
$z^{2n+1}=1$ の解である。

$$\therefore\ z^{2n+1}-1=(z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots(z-\alpha^{2n})$$

$z \neq 1$ のとき、

$$\frac{z^{2n+1}-1}{z-1}=(z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots(z-\alpha^{2n})$$

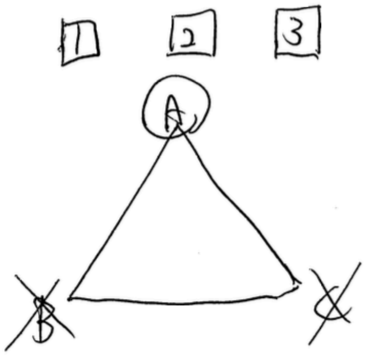
$$\Leftrightarrow\ 1+z+z^2+\cdots+z^{2n}=(z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots(z-\alpha^{2n})$$

これは z の恒等式なので、$z=1$ を代入して、

$$\begin{aligned}2n+1 &= (1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{2n})\\ &= |(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{2n})|\\ &= L^2\end{aligned}$$

$$\therefore\ L=\sqrt{2n+1}$$

$\boxed{4}$



(1) P_2 : $A \to$ 任意, B or $C \to A$ とならなければならない.

すなわち、1回目
$1 \to$ 任意
$2 \to 2$
$3 \to 1$

よって
$$P_2 = \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \underline{\frac{5}{9}}$$

この試行をn回くり返したときXが連続しないのは.
(i) 1回目 〇が出て 2〜n回までXが連続しない.
(ii) 1回目 〇が出て, 2回目は〇, 3〜n回目までXが連続しない,
となればよいので,

$$P_n = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times P_{n-2} \quad (n \geqq 3) \quad P_1 = 1,\ P_2 = \frac{5}{9}$$

$$\therefore P_{n+2} = \frac{1}{3}P_{n+1} + \frac{2}{9}P_n \quad (n \geqq 1)$$

$$\Leftrightarrow P_{n+2} - \frac{1}{3}P_{n+1} - \frac{2}{9}P_n = 0$$

これを変形して.

$$\therefore P_{n+1}-\frac{2}{3}P_n=\left(P_2-\frac{2}{3}P_1\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$=\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\therefore P_{n+2}+\frac{1}{3}P_{n+1}=\frac{2}{3}\left(P_{n+1}+\frac{1}{3}P_n\right)$$

$$P_{n+1}+\frac{1}{3}P_n=\left(P_2+\frac{1}{3}P_1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$=\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

辺々ひいて,

$$P_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

これより.

$$P_3=2\cdot\frac{16}{81}+\frac{1}{81}=\frac{33}{81}=\frac{11}{27}$$

$$P_4=2\cdot\frac{32}{243}-\frac{1}{243}=\frac{63}{243}=\underline{\frac{7}{27}}$$

(2)

(1)の結果より.

$$P_n=2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$\boxed{5}$ 9進数で表わしたとき末尾に0が1つあらわれるには素因数分解したときに3が2つ存在することである。

(1) $8! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$ において素因数3は2つあるので、0の数は1つ　$\therefore$ $\underline{f(8)=1}$

(2) $n!$ における素因数3の個数は、

$$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{3^2}\right]+\left[\frac{n}{3^3}\right]+\cdots<\frac{n}{3}+\frac{n}{3^2}+\frac{n}{3^3}+\cdots=\frac{n}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{n}{2}$$

よって3が2つ存在してはじめて末尾に0が1つあらわれるので、0の数kは、

$$k<\frac{k}{2}\leqq\frac{n}{4}$$

(3) 求める最小のnは$n!$の中の3の素因数の数が以上となる最小のnのことである。

$3!$の中の3の個数 : 1
$(3!)^2$の中の3の個数 : $3+1=4$
$(3!)^3$ 〃 : $3^2+3+1=13$
$(3!)^4$ 〃 : $3^3+3^2+3+1=40$
$(3!)^5$ 〃 : $3^4+3^3+3^2+3+1=121$
$(3!)^6$ 〃 : $3^5+3^4+3^3+3^2+3+1=364$
$(3!)^7$ 〃 : $3^6+3^5+\cdots+1=1093$

であるから

$2000\div1093=1\cdots907$
$907\div364=2\cdots179$
$179\div121=1\cdots58$
$58\div40=1\cdots18$
$18\div13=1\cdots5$
$5\div4=1\cdots1$

$$\therefore\ 3^7+3^6\times2+3^5+3^4+3^3+3^2+3$$
$$=\frac{3(3^7-1)}{3-1}+3^6=\underline{4008}$$