I

（1）

$$\int_1^4 \sqrt{x}\log\left(x^2\right)dx$$

$t=\sqrt{x}$ とおくと，$2tdt=dx$

x	$1\to4$
t	$1\to2$

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 t\log t^4\cdot 2tdt\\
&=8\int_1^2 t^2\log tdt\\
&=8\left\{\left[\frac{1}{3}t^3\log t\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{3}t^3\cdot\frac{1}{t}dt\right\}\\
&=8\left\{\frac{8}{3}\log 2-\frac{1}{3}\int_1^2 t^2dt\right\}\\
&=\frac{8}{3}\left\{8\log 2-\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^2\right\}\\
&=\frac{8}{3}\left\{8\log 2-\frac{7}{3}\right\}\\
&=\frac{64}{3}\log 2-\frac{56}{9}
\end{aligned}$$

（2）

$$x^{2023}-1=x^3\left(x^{2020}-1\right)+x^3-1$$

ここで

$$\begin{aligned}
x^{2020}-1&=\left(x^5\right)^{404}-1\\
&=\left(x^5-1\right)\cdot\sum_{k=0}^{403}x^{5k}\\
&=(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\cdot\sum_{k=0}^{403}x^{5k}
\end{aligned}$$

より，$x^{2020}-1$ は $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割り切れる．よって余りは

x^3-1

II

（1）

R は OD と平面 $\boldsymbol{CPQ}$ の交点となる. R は平面 CPQ 上の点なので

$$\overrightarrow{OR} = r\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OQ} + t\overrightarrow{OC} \quad (r+s+t=1)$$
$$= \frac{1}{3}r\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$$

R は OD 上の点でもあるので,

$$\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA} + 2k\overrightarrow{OB} + 3k\overrightarrow{OC}$$

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$は互いに一次独立なので

$$\frac{1}{3}r = k,\ \frac{1}{2}s = 2k,\ t = 3k$$
$$\Leftrightarrow r = 3k,\ s = 4k,\ t = 3k$$

$r+s+t=1$ に代入して,

$$k = \frac{1}{10}$$

$$\therefore \overrightarrow{OR} = \frac{1}{10}\left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}\right)$$

これより,

$$OR : RD = \frac{1}{10} : \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 1 : 9$$

III

（1）

Y が 5 で割り切れるのは $X_1, X_2 \cdots X_n$ の中に少なくとも 1 つ 5 があること，すなわち n 回サイコロを投げたとして，少なくとも 1 回は 5 の目が出ることである．

$$\therefore 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

（2）

Y が 15 で割り切れるのは, n 回サイコロを投げたとき，少なくとも 1 回

① 5 の目

② 3 または 6 の目

が含まれることである．

ここで,

- 5 の目を 1 つも含まない　$\left(\frac{5}{6}\right)^n$
- 3, 6 の目を 1 つも含まない　$\left(\frac{4}{6}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$
- 3, 5, 6 を 1 つも含まない　$\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

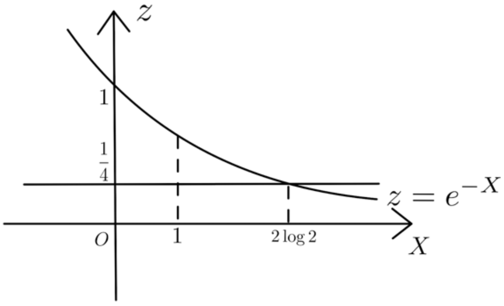
よって，求める確率は

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

IV

$x^2 = X$ とし，$g(X) = e^{-X} + \frac{1}{4} + 1$ とおく

ここで，$-1 \leqq x \leqq 1$ より $0 \leqq X \leqq 1$



$e^{-X} = \frac{1}{4}$ のとき

$$\begin{aligned} -X &= \log\frac{1}{4} \\ &= -2\log 2 \\ X &= 2\log 2 \\ &= \log_2 4 > 1 \end{aligned}$$

$0 < X < 1$ において，$g'(X) < 0$ より

$g(X)$ は単調減少.

$$g(0) = 1 + 1 = 2$$

$$g(1) = e^{-1} + \frac{5}{4} = \frac{1}{e} + \frac{5}{4}$$

$$\therefore \frac{5}{4} \leqq g(X) \leqq 2$$

$z = g(X)$ とおくと

$$f(x) = z + \frac{1}{z} \quad \left(\frac{5}{4} \leqq x \leqq 2\right)$$

これを $h(x)$ とおくと

$$h(z) = z + \frac{1}{z}$$

$$h'(z) = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{(z+1)(z-1)}{z^2}$$

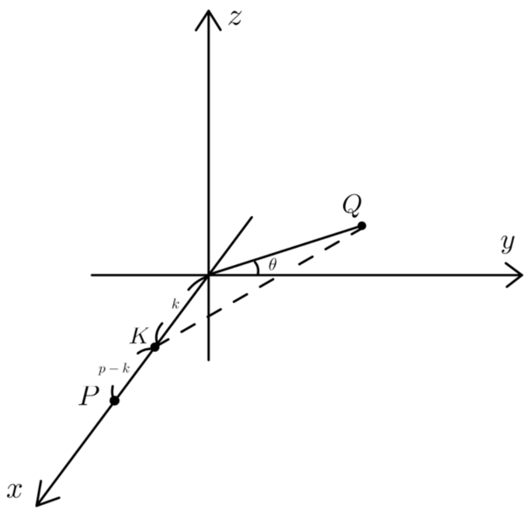
$\frac{5}{4} \leqq z \leqq 2$ より，$h'(z) > 0$ となるので，$h(z)$ は単調増加関数.

よって

最小値は $z = \frac{5}{4}$ のとき $z = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{41}{20}$

最大値は $z = 2$ のとき $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$\boxed{\text{V}}$



$P(p,\ 0,\ 0)$

$Q(0,\ r\cos\theta,\ r\sin\theta)\quad (r \geqq 0, 0 \leqq \theta < 2\pi)$

とおくと $|p|+r=1$

よって PQの通過範囲がつくる立体はyz平面に対して対象である．よって$p \geqq 0$ の場合を考える．

このとき

$$P(p,\ 0,\ 0),\ Q\,(0,\ (1-p)\cos\theta, (1-p)\sin\theta)\qquad (0 \leqq p \leqq 1)$$

と表される．

線分PQ上の x 座標が k である点は　$(0 \leqq k \leqq p)$

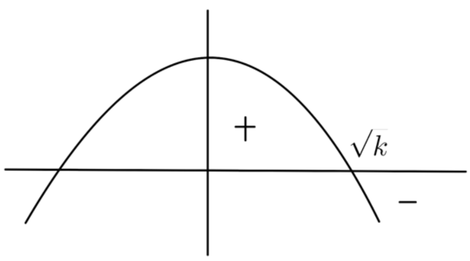
$$\frac{1}{p}\left\{k\overrightarrow{OP}+(p-k)\overrightarrow{OQ}\right\}$$
$$=\frac{1}{p}\left\{k(p,\ 0,\ 0)+(p-k)\,(0,\ (1-p)\cos\theta,\ (1-p)\sin\theta)\right\}$$
$$=(k,\ 0,\ 0)+\left(0,\ \frac{(1-p)(p-k)}{p}\cos\theta,\ \frac{(1-p)(p-k)}{p}\sin\theta\right)$$
$$=\left(k,\ \frac{(1-p)(p-k)}{p}\cos\theta,\ \frac{(1-p)(p-k)}{p}\sin\theta\right)$$

θが $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を動くとして この点は$x=k$ 平面上 中心$(k,0,0)$, 半径$\dfrac{(1-p)(p-k)}{p}$ の円を描く．

ここで この半径を$R(p)$ とすると

$$R(p)=\frac{(1-p)(p-k)}{p}\quad (k \leqq p \leqq 1)$$

$$R'(p)=\frac{\{-(p-k)(1-p)\}\,p-(1-p)(p-k)}{p^2}$$
$$=\frac{1}{p^2}(-p^2+k)$$



p	k		$\sqrt{k}$		1
$R'(p)$		$+$	0	$-$	
$R(p)$	0	↗		↘	0

$$R\left(\sqrt{k}\right)=\frac{\left(1-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k}-k\right)}{\sqrt{k}}=\left(1-\sqrt{k}\right)^2$$

よって p が $0 \leqq p \leqq 1$ に変化するとき $x=k$ の平面上 中心$(k,0,0)$ 半径$\left(1-\sqrt{k}\right)^2$ の円を描く. よって求める体積は

$$\begin{aligned}&2\cdot\int_0^1 \pi\left(1-\sqrt{k}\right)^2 dk\\&=2\pi\int_0^1\left(k-2\sqrt{k}+1\right)dk\\&=2\pi\left[\frac{1}{2}k^2-\frac{4}{3}k+k\right]_0^1\\&=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+1\right)\\&=2\pi\left(\frac{3}{6}-\frac{8}{6}+\frac{6}{6}\right)=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

VI

（1）

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(\theta+2\theta)\\ &= \cos\theta\cos 2\theta-\sin\theta\sin 2\theta\\ &= \cos\theta\left(2\cos^2\theta-1\right)-2\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)\\ &= 4\cos^3\theta-3\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= \cos 2(2\theta)\\ &= 2\cos^2 2\theta-1\\ &= 2(2\cos^2\theta-1)^2-1\\ &= 8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1\end{aligned}$$

（2）

$\cos 2\theta = 2\sin^2\theta - 1$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

より，$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta$+($\cos\theta$の$(n-1)$次以下の整式）と推測される．

同様に

$\sin n\theta = \sin\theta(2^{n-1}\cos^{n-1}\theta$+($\cos\theta$の$(n-2)$次以下の整式）と推測される．以下帰納法で示す

$n=1$ のとき $\cos\theta = 2^{1-1}\cos\theta$, $\sin\theta = \sin\theta\cdot(2^0\cos^0\theta) = \sin\theta$ より成立

$n=k$ のとき 成立すると仮定する．

$\cos k\theta = 2^{k-1}\cos^k\theta + g(\cos\theta)$ $g(x)$は k-1 次以下の整式

$\sin k\theta = \sin\theta\times\left\{2^{k-1}\cos^{k-1}\theta + h(\cos\theta)\right\}$ $h(x)$は k-2 次以下の整式

このとき

$$\begin{aligned}\cos(k+1)\theta &= \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta\\ &= 2^{k-1}\cos^{k+1}\theta + \cos\theta\cdot g(\cos\theta) - \sin^2\theta(2^{k-1}\cos^{k-1}\theta + h(\cos\theta))\\ &= 2^{k-1}\cos^{k+1}\theta + g(\cos\theta)\cos\theta - (1-\cos^2\theta)(2^{k-1}\cos^{k-1}(\theta) + h(\cos\theta))\\ &= (2^{k-1}+2^{k-1})\cos^{k+1}\theta + g(\cos\theta)\cos\theta + h(\cos\theta)\cos^2\theta - (2^{k-1}\cos^{k-1}\theta + h(\cos\theta))\\ &= 2^k\cos^{k+1} + \text{（}\cos\theta\text{ の k 次以下の整式）}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}sin(k+1)\theta &= \sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta\\ &= \sin\theta\times\left\{2^{k-1}\cos^k\theta + h(\cos\theta)\cos\theta\right\} + \left\{2^{k-1}\cos^k\theta + g(\cos\theta)\right\}\sin\theta\\ &= \sin\theta\times\text{\{ } 2^k\cos^k\theta + \text{（}\cos\theta\text{の k-1 次以下の整式)\}}\end{aligned}$$

次に $\theta = \dfrac{m}{n}\pi$ となる自然数 m, n が存在したとすると

$n\theta = m\pi$

よって $\cos n\theta = \cos m\pi = (-1)^n$

したがって

$\therefore 2^{n-1}\cos^n\theta$+($\cos\theta$ の n－1 次以下の整式) = (－1)ᵐ

$\cos\theta=\dfrac{1}{p}$ を代入

$2^{n-1}\dfrac{1}{p^n}+(\dfrac{1}{p}$ の n−1 次以下の整式) ＝ (−1)^m

$\therefore 2^{n-1}+p^n(\dfrac{1}{p}$ の n−1 次以下の整式) ＝ (−1)$^m p^n$

$2^{n-1}+p(\dfrac{1}{p}$ の n−1 次以下の整式) ＝ (−1)$^m p^n$

$2^{n-1}=p\ \{(-1)^m p^{n-1}-$ (p の n−1 次以下の整式)}

となる．ここで p は 2^{n-1} の約数となるが p は素数なので p＝2 これは p が 3 以上の整式であることに反する．よってこのような m, n は存在しない．