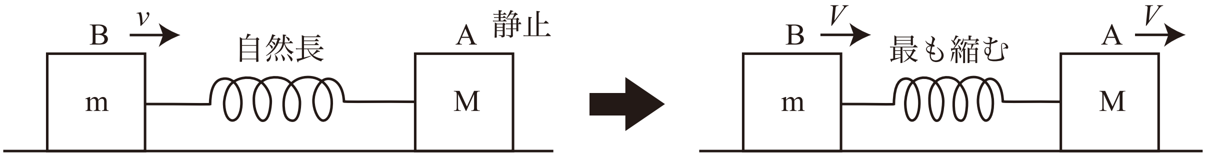
I

（1）



最も縮んだとき, A と B は同じ速度(=V)となる.

このときのバネの縮を x とすると，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$= \frac{1}{2}(M+m)V^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$\therefore \quad \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(M+m)V^2$$

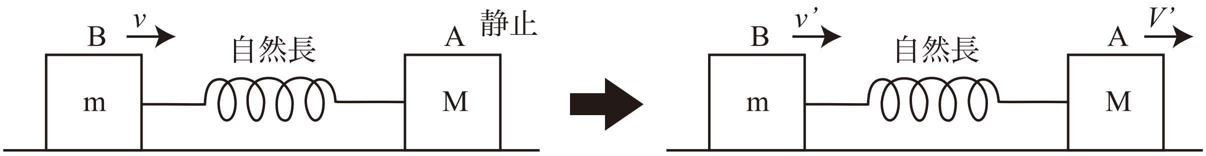
一方, A, B 全体としては横方向に外力が働いていないので運動量保存則が成立する.

$$mv = mV + MV$$
$$\Leftrightarrow \quad V = \frac{m}{M+m}v \quad \boxed{1}$$

これを代入して

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(M+m)\left\{\frac{m}{M+m}v\right\}^2$$
$$= \frac{1}{2}v^2\left\{m - \frac{m^2}{M+m}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{mM}{M+m}v^2 \quad \boxed{2}$$

次に，始めとあとの状態で考える.



始め：B が接したとき　　　あと：B が離れるとき

離れるときの A, B の速度をそれぞれ V', v'とする.

この 2 時点感ではどちらもバネは自然長で位置エネルギーは存在しない.

この過程を A, B 間の衝突とみなした場合，力学的エネルギーは保存するので，反発係数は 1 $\boxed{5}$

よって

運動量保存則：　$mv = MV' + mv'$

反発係数の式：　$\dfrac{m' - V'}{v - 0} = -1$

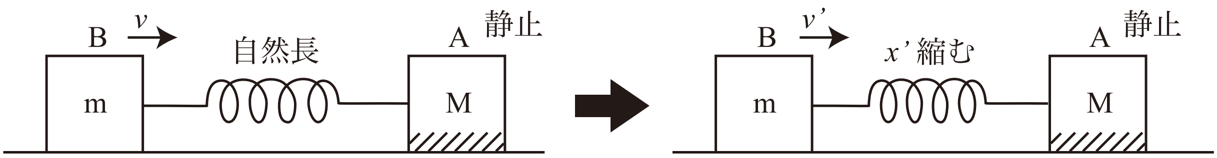
これを v', V' についての連立方程式として解いて

$$v' = \frac{2m}{M+m}v\,,\quad v' = \frac{m-M}{M+m}v$$

求めるのは速さなので，絶対値をとって

$$|V'| = \frac{2m}{M+m}v \quad \boxed{3} \qquad |v'| = \frac{M-m}{M+m}v \quad \boxed{4}$$

（2）

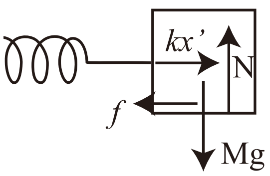


接しはじめたとき　　　　A が動き出す瞬間

A が動き出すまでは，A は動いていないので摩擦力による仕事は発生しない．
よって，それまでの間はエネルギー保存則が成立する．
動き出す瞬間の B の速度を v' バネの縮みを x' とすると

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}kx'^2$$

一方，このとき A に働く静止摩擦力を f とすると



横：　$kx' = f$

縦：　$N = Mg$

静止摩擦力 f は最大静止摩擦力となっているので

$$f = \mu N$$

これらより

$$kx' = f = \mu N = \mu Mg$$

$$\therefore \quad x' = \frac{\mu Mg}{k}$$

これをエネルギー保存則に代入して

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{\mu Mg}{k}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{(\mu Mg)^2}{2k}$$

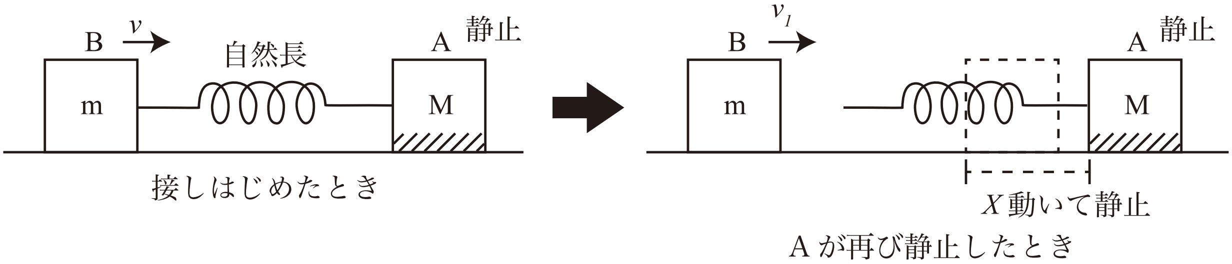
このときの B の運動エネルギーが存在すればよいので

$$\frac{1}{2}mv'^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 \frac{(\mu Mg)^2}{2k} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad v^2 > \frac{(\mu Mg)^2}{km}$$

$$\therefore \quad v > \frac{\mu Mg}{\sqrt{km}} \qquad \boxed{6}$$



始めとあとで考える.

エネルギー収支をみると A に働く動摩擦力が $\mu' Mg$ なので移動距離を X とすると

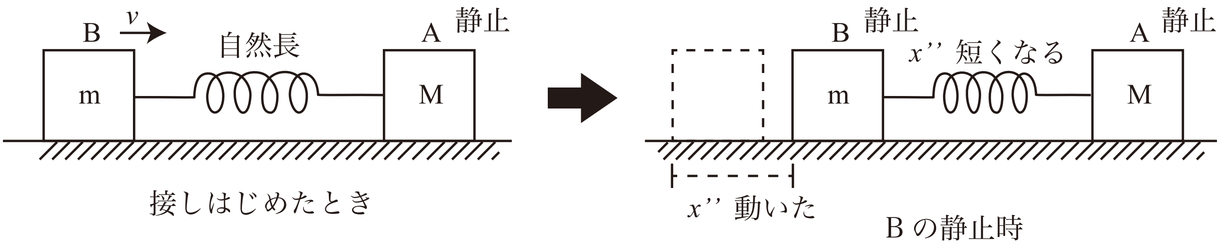
$$\frac{1}{2}mv^2 \quad - \quad \mu' MgX \quad = \quad \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

接し始めたときの力学的エネルギー　　摩擦力のした仕事　　A が静止したときの力学的エネルギー

$$\Leftrightarrow \mu' MgX = \frac{1}{2}m\left(v^2 - {v_1}^2\right)$$

$$\therefore X = \frac{m\left(v^2 - {v_1}^2\right)}{2\mu' Mg} \qquad \boxed{7}$$

（3）



A は静止したままなので，バネが x'' 縮んだとき，B は x'' 右へ動いたことになる．

B に働く摩擦力は $\mu' mg$ の動摩擦力なので，エネルギーの関係を考えると

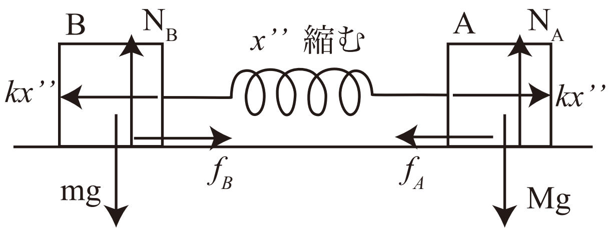
$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{接し始めたときの力学的エネルギー}} \quad - \quad \underbrace{\mu' mgx''}_{\text{摩擦力のした仕事}} \quad = \quad \underbrace{\frac{1}{2}kx''^2}_{\text{B が静止したときの力学的エネルギー}}$$

$$\Leftrightarrow \quad kx''^2 + 2\mu mgx'' - mv^2 = 0$$

$$\therefore \quad x'' = \frac{-\mu' mg + \sqrt{(\mu' mg)^2 + kmv^2}}{k} \qquad \boxed{8}$$

A, B ともに静止しているとき，

A, B に働く力は A, B n 働く静止摩擦力をそれぞれ f_A，f_B，垂直抗力を N_A，N_B として



力のつり合い

A　縦：$N_A = Mg$

　　横：$kx'' = f_A$

B　縦：$N_B = Mg$

　　横：$kx'' = f_B$

これらより

$$f_A = f_B = kx'' - \mu' mg + \sqrt{(\mu' mg)^2 + kmv^2}$$

一方，これら静止摩擦力は最大静止摩擦力以下でなければならないので

$$f_A \leqq \mu N_A = \mu Mg$$

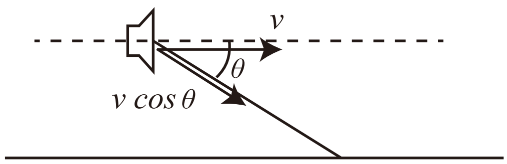
$$f_B \leqq \mu N_B = \mu mg$$

$m < M$より，これらが成立するためには，$f_B \leqq \mu mg$ が成り立つので

$$
\begin{aligned}
-\mu mg + \sqrt{(\mu' mg)^2 + kmv^2} &\leqq \mu mg \\
\sqrt{(\mu' mg)^2 + kmv^2} &\leqq (\mu + \mu')\, mg \\
(\mu' mg)^2 + kmv^2 &\leqq (\mu + \mu')^2\, m^2 g^2 \\
kmv^2 &\leqq \left\{ (\mu + \mu')^2 - \mu'^2 \right\} m^2 g^2 \\
&= m\,(\mu + 2\mu')\, m^2 g^2 \\
\therefore \quad v^2 &\leqq \frac{\mu\,(\mu + 2\mu')}{k} mg^2 \\
v &\leqq \sqrt{frac\mu\,(\mu + 2\mu')kg} \qquad \boxed{9}
\end{aligned}
$$

II

（1）音源が近づくドップラー効果なので，



$$f' = \frac{V}{V - v} f \qquad \boxed{1}$$

θ の角をなすときは音源の速度の観測者向きの成分 $v\cos\theta$ で考える

$$f'' = \frac{v}{v - v\cos\theta} f \qquad \boxed{2}$$

音源を発した地点を Q とする．

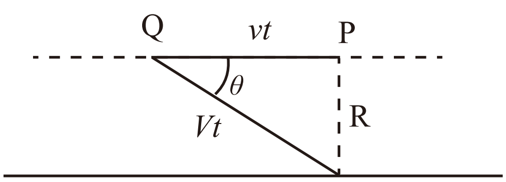
Q から P まで音源が移動するのにかかる時間を t とすると

$$PQ = vt$$

同じ時間 t で Q からの音は O に到達するので

$$OQ = Vt$$

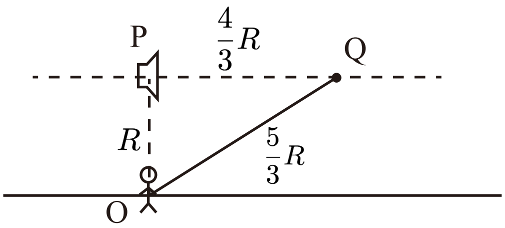
よって，図に示すと



これより，$\cos\theta = \dfrac{vt}{Vt} = \dfrac{v}{V}$ の式に代入して

$$f'' = \frac{V}{V - v\cdot\frac{v}{V}}f$$

$$= \frac{V^2}{V^2 - v^2}f \qquad \boxed{3}$$



P から $\frac{4}{3}R$ 離れた点を Q とすると，$OQ = \frac{5}{3}R$ となるので

$$PO = OQ = R + \frac{5}{3}R = \frac{8}{3}R$$

この間を音速 V で動くので，かかる時間は

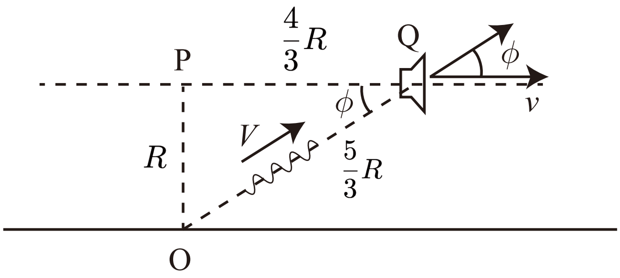
$$\frac{\frac{8}{3}R}{V} = \frac{4R}{3V}$$

一方, PQ 間を音源が移動するのにかかる時間は

$$\frac{\frac{4}{3}R}{v} = \frac{4R}{3v}$$

これらが等しいので

$$\frac{8R}{3V} = \frac{4R}{3v} \qquad \therefore\ V = \frac{1}{2}V \qquad \boxed{4}$$



$\angle OQP = \phi$ とすると，$\cos\phi = \frac{4}{5}$

よって 音源の Q での OQ 方向の移動速度成分は O から離れる向きに　$v\cos\phi = \frac{4}{5}v$

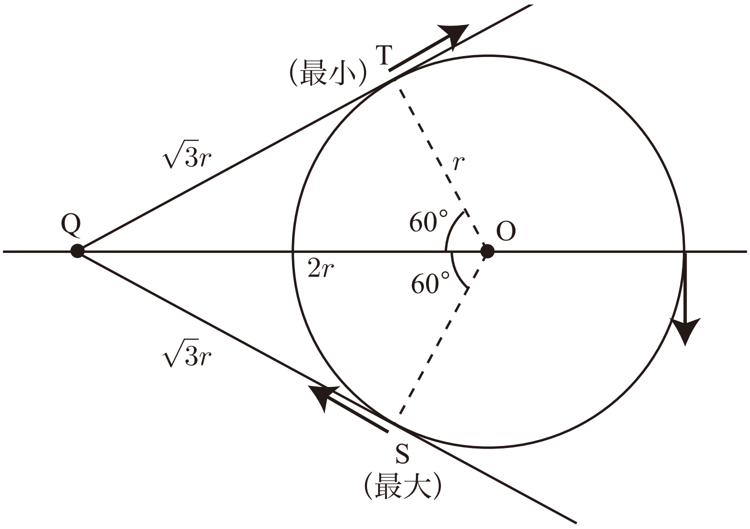
したがって

$$f''' = \frac{V - frac45v}{V}f = \frac{5V - 4v}{5V}f$$

$v = \dfrac{1}{2}V$ 　を代入して

$$\underline{f''' = \frac{5V - \quad}{5\quad} f = \frac{5}{3}f} \quad \boxed{5}$$

（2）



Q から円に接線を 2 本引く．その接点を S(下側），T(上側)とする．
音源の速度の観測者向きの成分が

最も大きいのは　$Q\ (=v)$

最も小さいのは　$T\ (=v)$

となるので

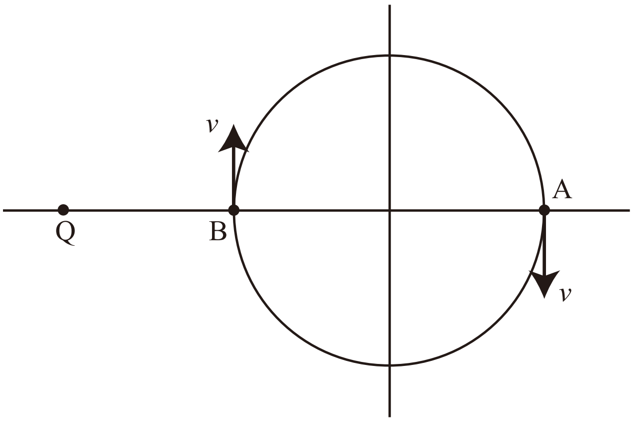
最大振動数：　Q 点で　$\underline{\dfrac{V}{V-v}f}$　$\boxed{6}$

最小振動数：　T 点で　$\underline{\dfrac{V}{V+v}f}$　$\boxed{7}$

$SQ = TQ = \sqrt{3}r$ なので S, T からうけた音が Q に到達するのにかかる時間は　$\dfrac{3r}{V}$　で同じ
よって 求める時間は ST 間を音源が移動した時間となる．

$$\therefore \frac{r \cdot \frac{2}{3}\pi}{v} = \underline{\frac{2\pi r}{3v}} \quad \boxed{8}$$

$\boxed{9}$　は上図参照



$B\,(-r,\ 0)$ とする

A, B 上では音源は y 軸方向に移動しており，観測者方向の速度成分の速度はないのでドップラー効果は起こらない．よって観測する振動数はどちらも f のまま．
A 点で音を出した時刻を $t=0$ とすると, Q 点でそれを観測する時刻は　$t=\dfrac{3r}{V}$
音源が B 点に到達する時刻は　$t=\dfrac{\pi r}{V}$　であり, B から出した音で Q に到達するには
さらに　$\dfrac{r}{V}$　秒かかるので B で発した音が Q に到達するのは

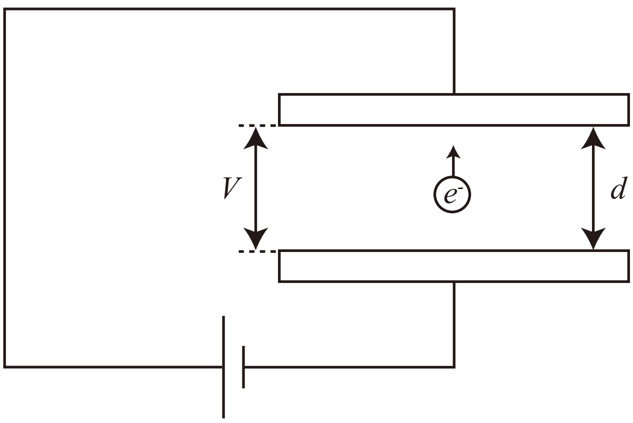
$$t=\frac{\pi r}{V}-\frac{r}{V}$$

よって，求める時間は

$$\frac{\pi r}{v}+\frac{r}{V}-\frac{\pi r}{V}=\underline{\frac{\pi r}{v}-\frac{2r}{V}\quad\boxed{10}}$$

II

（1）



偏向板内の電場 E は　$E=\dfrac{V}{d}$
よって電子($-e$)が受ける力は x 軸上向き　$\boxed{1}$

また，その大きさは　$eE = \dfrac{eV}{d}$　$\boxed{2}$

Z(右)方向には力を受けていないので等速運動をする．

$$\therefore \ \frac{l}{v} \quad \boxed{3}$$

偏向板中の x 方向の運動方程式：　$ma = \dfrac{eV}{d}$　$\therefore\ a = \dfrac{eV}{md}$　より，等加速度運動をする．
したがって

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{eV}{md}\left(\frac{l}{v}\right)^2 = \frac{eVl^2}{2mdv^2} \quad \boxed{4}$$

y, z 方向には力が働かないから

$$y = 0 \quad \boxed{5}$$

速度は

$$v_x = at = \frac{eV}{md}\cdot\frac{l}{v} = \frac{eVl}{mdv} \quad \boxed{6}$$

$$v_y = 0 \quad \boxed{7}$$

$$v_z = v \quad \boxed{8}$$

偏向板を出てから蛍光板に達する時間は　$\dfrac{L}{v}$　秒ないのでその間は等速直線運動をする．

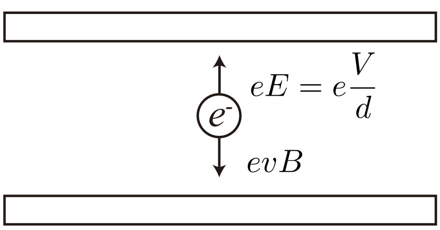
$$\therefore\ x = \underbrace{\frac{eVl^2}{2mdv^2}}_{\text{偏向板を出たときの位置}} + \underbrace{\frac{eVl}{mdv}}_{v_x}\ \frac{v}{l}$$

$$= \frac{eVl^2}{2mdv^2} + \frac{eVlL}{mdv^2}$$

$$= \frac{eVl}{2mdv^2}(l + 2L) \quad \boxed{9}$$

$$y = 0 \quad \boxed{10}$$

（2）ローレンツ力　$F = evB$　$\boxed{11}$



ローレンツ力 evB が x 軸下向きに働いて電場による力　$e\dfrac{V}{d}$
とつり合えば良い

$$\therefore\ e\frac{V}{d} = evB$$

$$\Leftrightarrow\ V = vBd \quad \boxed{12}$$