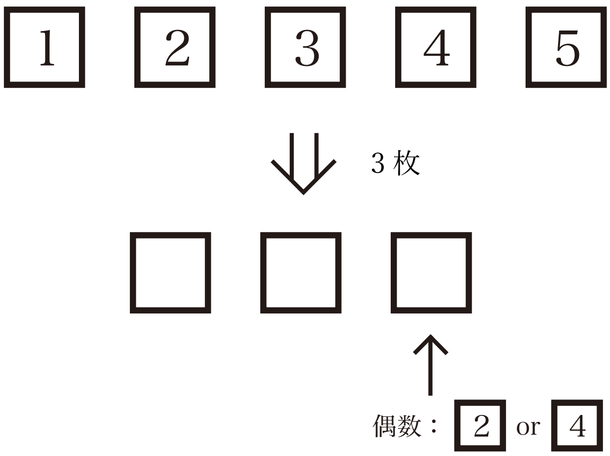
I

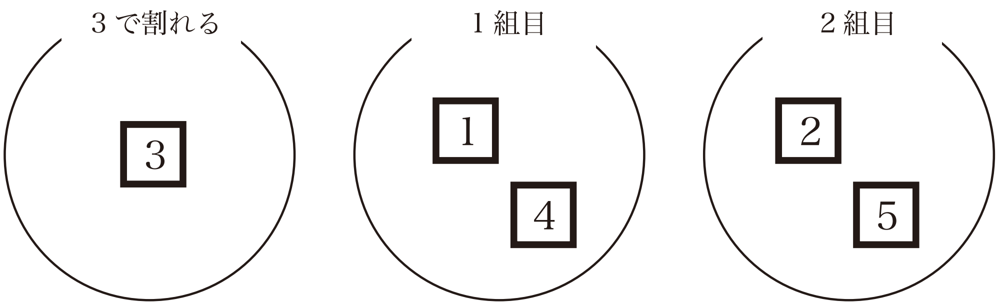
（1）

(i)



$2 \times 4 \times 3 = 24$　（アイ）

(ii)



とり方： $1 \times 2 \times 2$
×
並べ方： $3! = 6$

$= 24$ （ウエ）

(iii)

1 の位が 2 のとき

⇒ 3 と 1 or 4　とり方 2 通り × 並べ方 2 = 4

1 の位が 4 のとき

⇒ 3 と 2 or 5　とり方 2 通り × 並べ方 2 = 4

計 8　（オ）

（2）　$x^2 - x + 1 = 0$　の解　α, β とすると，解と係数より

$$\alpha + \beta = 1$$
$$\alpha\beta = 1$$

よって，

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$= \frac{1-2}{1} = -1$$ **（カキ）**

$x^2 - x + 1 = 0$　の両辺に　$x + 1$　をかけて

$$x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1$$

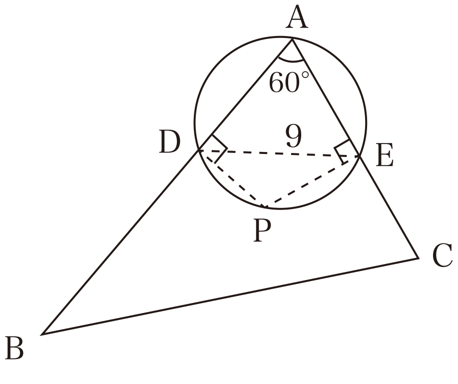
α, β はこれを満たすので

$$\alpha^3 = \beta^3 = -1$$
$$\therefore \quad \alpha^9 + \beta^9 = (\alpha^3)^3 + (\beta^3)^3 = -1 - 1 = -2$$ **（クケ）**

$$\alpha + \beta = 1$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 - 2 = -1$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = -2$$
$$\alpha^4 + \beta^4 = \alpha \cdot \alpha^3 + \beta \cdot \beta^3 = -(\alpha + \beta) = -1$$
$$\alpha^5 + \beta^5 = \alpha^2 \cdot \alpha^3 + \beta^2 \cdot \beta^3 = -(\alpha^2 + \beta^2) = 1$$
$$\alpha^6 + \beta^6 = 1 + 1 = 2$$

この繰り返しなので，$n = 6$　**（コ）**

（3）

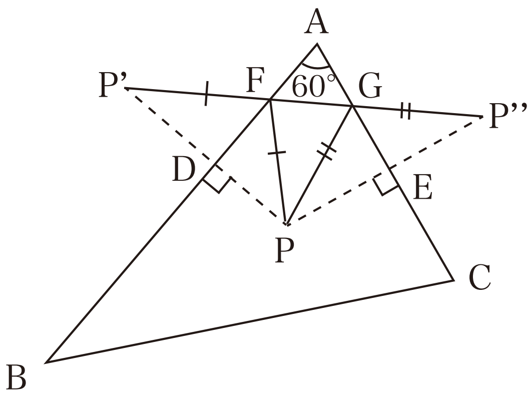


$\angle ADP = \angle AEP = 90^\circ$　より

A, D, P, E を通る円がかけて, AP はその直径となる．

半径を R とすると，正弦定理より

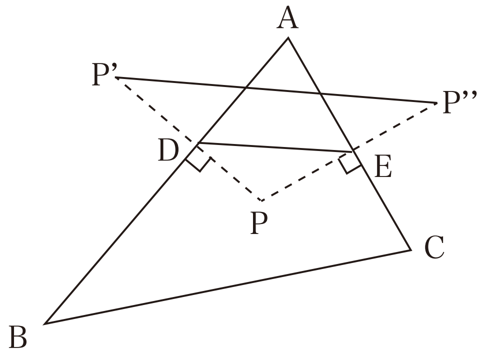
$$\frac{DE}{\sin A} = 2R$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$
$$\Leftrightarrow 2R = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$ **（サシ）**



P の AB に関する対象点を P', AC に関する対象点を P''とすると,

$$PF++FG+GP=P'+FG+GP''$$

これが最小になるのは, F, G が直線 P'P''上にくるときである.

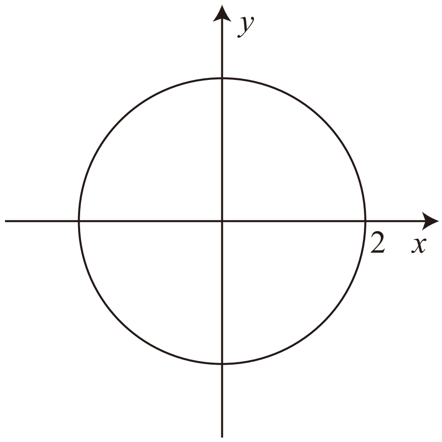


PP'と AB の交点が D, AC の交点が E となるので, 中点連結定理より

$P'P''=2DE=$ 18　（スセ）

これが 最小値

II



$$4\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=0$$
$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$$

（1）　$4\vec{a}+\vec{b}=-3\vec{c}$ より

2 乗して

$$16|\vec{a}|^2+25|\vec{b}^2|+40\vec{a}\vec{b}=9|\vec{a}|^2$$
$$64+100+40\vec{a}\vec{b}=36$$
$$40\vec{a}\vec{b}=-128$$
$$\vec{a}\vec{b}=-\frac{128}{40}=-\frac{16}{5}$$
（アイウエ）

また，$5\vec{b}+3\vec{c}=-4\vec{a}$ より

$$\therefore\ 25|\vec{b}|^2+9|\vec{c}^2|+30\vec{b}\vec{c}=16|\vec{a}|^2$$
$$100+36+30\vec{b}\vec{c}=64$$
$$30\vec{b}\vec{c}=-72$$
$$\vec{b}\vec{c}=-\frac{72}{30}=-\frac{12}{5}$$
（オカキク）

また，$4\vec{a}+3\vec{c}=-5\vec{b}$ より

$$\therefore\ 16|\vec{a}|^2+9|\vec{c}|^2+24\vec{a}\vec{c}=25|\vec{b}|^2$$
$$64+36+24\vec{a}\vec{c}=100$$
$$\vec{a}\vec{c}=0$$
（ケ）

（2）

$$|AB|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2$$
$$= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\,\vec{b} + |\vec{b}|^2$$
$$= 4 - 2\cdot(-\frac{16}{5}) + 4$$
$$= 8 + \frac{32}{5} = \frac{72}{5} \quad \text{(コサシ)}$$
$$|AC|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2$$
$$= |\vec{c}|^2 - 2\vec{a}\,\vec{c} + |\vec{a}|^2$$
$$= 4 - 2\cdot 0 + 4 = 8 \quad \text{(ス)}$$

（3）

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

ここで,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (\vec{b} - \vec{a})\cdot(\vec{c} - \vec{a})$$
$$= |\vec{a}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{a}|^2$$
$$= 4 - \frac{16}{5} - 0 + 4$$
$$= 8 - \frac{16}{5} = \frac{24}{5} \quad \text{(セソタ)}$$

より

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{72}{5}\cdot 8 - (\frac{24}{5})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{25}\{5\cdot 72\cdot 8 - 24\cdot 24\}}$$
$$= \frac{1}{10}\cdot 8\sqrt{5\cdot 9 - 9} = \frac{1}{10}\cdot 8\cdot 6 = \frac{24}{5}$$

（4）

$\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ かつ $|\vec{c}| = 2$ より, $\vec{c} = (0, 2)$ or $(0, -2)$

c の y座標は正より, $\vec{c} = (0, 2)$ （ヌネ）

$$\therefore 4\vec{a} + 5\vec{b} + 3\vec{c} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 4\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad 5\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix} \quad \text{(チツテトナニ)}$$

III

$$y = 2\cos^5 x - 3\cos^3 x + \cos x - 2\sin^5 x + 3\sin^3 x - \sin x$$
$$= 2\left(\cos^5 x - \sin^5 x\right) - 3\left(\cos^3 x - \sin^3 x\right) + (\cos x - \sin x)$$

$$t = \cos x - \sin x$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos x \cos\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leqq x < 2\pi$ より $\underline{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}}$ （アイ）

$$t^2 = (\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos x \sin x = \frac{1-t^2}{2} \quad \text{（ウエ）}$$

$$t^3 = \cos^3 x - 3\cos^2 x \sin x + 3\cos x \sin^2 x - \sin^3 x$$
$$= \cos^3 x - \sin^3 x - 3\cos x \sin x (\cos x - \sin x)$$

$$\therefore \quad \cos^3 x \sin^3 x = t^3 + 3 \cdot \frac{1-t^2}{2} \cdot t$$
$$= \frac{2t^3 + 3t - 3t^3}{2} = \frac{-t^3 + 3t}{2} \quad \text{（オカ）}$$

$$\cos^5 x \sin^5 x = \left(\cos^3 x - \sin^3 x\right)\left(\cos^2 X + \sin^2 x\right) - \cos^3 x \sin^2 x + \cos^2 x \sin^3 x$$
$$= \left(\cos^3 x - \sin^3 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) - \cos^2 x \sin^2 x (\cos x - \sin x)$$
$$= \frac{-t^3 + 3t}{2} \cdot 1 - \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^2 \cdot t$$
$$= \frac{1}{4}\left(-2t^3 + 6t - t5 + 2t^3 - t\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(-t^5 + 5t\right)$$

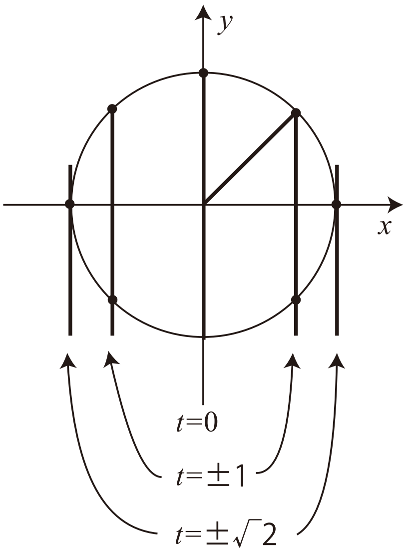
よって,

$$y = 2 \cdot \frac{1}{4}\left(-t^5 + 5t\right) - 3 \cdot \frac{-t^3 + 3t}{2} + t$$
$$= \frac{-t^5 + 5t + 3t^3 - 9t + 2t}{2}$$
$$= \frac{-t^5 + 3t^3 - 2t}{2} \quad \text{（キクケ）}$$

$$= -\frac{t}{2}\left(t^4 - 3t^2 + 2\right)$$
$$= -\frac{t}{2}\left(t^2 - 1\right)\left(t^2 - 2\right)$$
$$\therefore \quad t = 0, \quad \pm 1, \quad \pm\sqrt{2}$$

これより，

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \pm 1$$

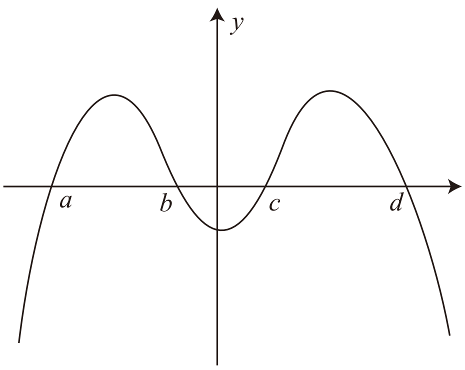


左図より，解は 8 個で　**(コ)**

$$x = 0, \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{4}\pi, \quad \pi, \quad \frac{5}{4}\pi, \quad \frac{7}{4}\pi$$

よって，最大値は

$$\frac{7}{4}\pi \qquad \textbf{(サシ)}$$



$$f(t) = \frac{1}{2}\left(-t^5 + 3t\ 3 - 2t\right)$$
$$f'(t) = \frac{1}{2}\left(-5t^4 + 9t^2 - 2\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(5t^4 - 9t^2 + 2\right)$$

$f'(t)$ は t の導関数なので，グラフは左右対称となる．

よって，$a = -d < 0, \quad b = -c < 0$ となっていることがわかる．
$5t^4 - 9t^2 + 2 = 0$ の 2 解を　$t_1, t_2\ (t_1 < t_2)$ とすると，解と係数の関係より

$$t_1 + t_2 = \frac{9}{5}$$
$$t_1 t_2 = \frac{2}{5}$$

また，

$$a=-\sqrt{t_1},\quad d=\sqrt{t_1},\quad b=-\sqrt{t_2},\quad c=\sqrt{t_2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad ac&=-\sqrt{t_1t_2}\\&=-\sqrt{\frac{2}{5}}=-\frac{\sqrt{10}}{5}\quad\text{（スセソタ）}\end{aligned}$$

$f(t)$ を $f'(t)$ で割ると

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{5}t \\ \hline \frac{5}{2}t^4+\frac{9}{2}t^2-1 & \frac{1}{2}t^5+\frac{3}{2}t^3-t \\ & \frac{1}{2}t^5+\frac{9}{10}t^3-\frac{1}{5}t \\ \hline & \frac{3}{5}t^3-\frac{4}{5}t \end{array}$$

$$\therefore\quad f(t)=f'(t)\cdot\frac{1}{5}t+\frac{3}{5}t^3-\frac{4}{5}t$$

これより

$$\begin{aligned}f(b)&=f'(b)\cdot\frac{1}{5}b+\frac{3}{5}b^3-\frac{4}{5}b\\&=\frac{b}{5}\left(3b^2-4\right)\end{aligned}$$

同様に

$$f(d)=\frac{d}{5}\left(3d^2-4\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(b)f(d)&=\frac{bd}{25}(3b^2-4)(3d^2-4)\\&=-\frac{\sqrt{t_1t_2}}{25}(3t_1-4)(3t_2-4)\\&=-\frac{\sqrt{t_1t_2}}{25}\{9t_1t_2-12(t_1t_2)+16\}\\&=-\frac{1}{25}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\left(9\cdot\frac{2}{5}-12\cdot\frac{9}{5}+16\right)\\&=-\frac{1}{125}\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot(18-108+80)\\&=-\frac{1}{125}\cdot\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot(-10)=\frac{2\sqrt{10}}{125}\quad\text{（チツテトナニ）}\end{aligned}$$