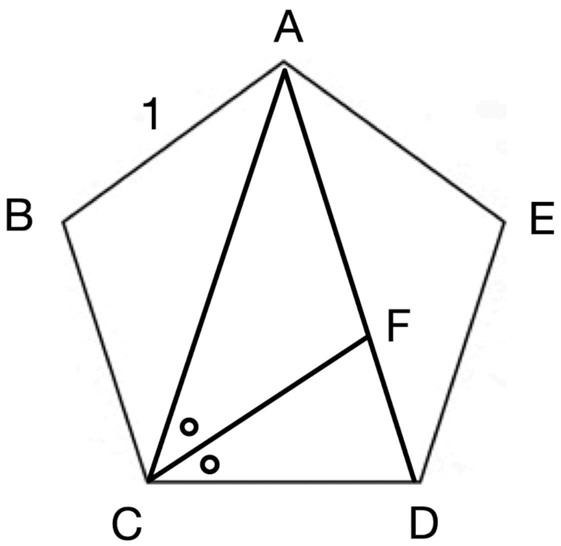
解答速報 2022
近畿大学医学部 推薦 数学

医学部受験 MEP

2021 年 11 月 21 日

$\boxed{1}$

(1)
図のように正五角形 $ABCDE$ をとる $\angle ACD$ の二等分線を AD の交点を F とすると



$$\angle B = \frac{2\pi \times (5-2)}{5} = 3\pi$$

$\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形なので

$$\angle BAC = \frac{\pi - \frac{3}{5}\pi}{2} = \frac{\pi}{5}$$

$\triangle AED$ についても同様。よって

$$\angle CAD = \frac{3}{5}\pi - \frac{\pi}{5} \times 2 = \frac{\pi}{5}$$

これより

$$\angle ACD = \angle ADC = \frac{\pi - \frac{\pi}{5}}{2} = \frac{2}{5}\pi$$

そして

$$\angle CFA = \pi - \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi\right) = \frac{2}{5}\pi$$

[グラフ 1-1-2]
以上より

$$CD = CF(\text{二等辺三角形}) = 1$$
$$CF = AF(\text{二等辺三角形}) = 1$$

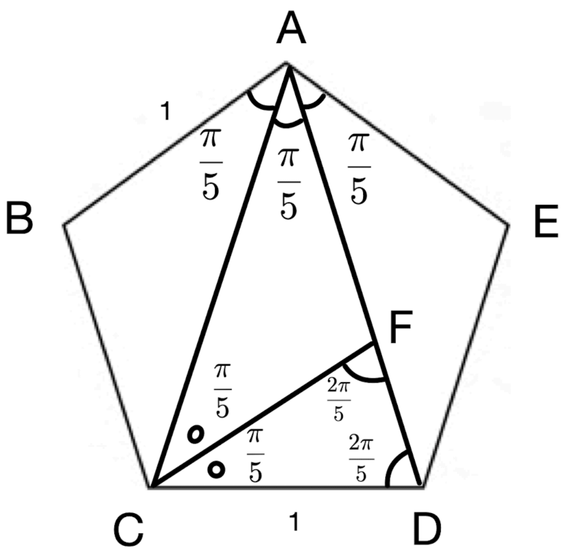
となるから, $DF = x$ とおくと　$\triangle ACD \backsim \triangle CDE$ より

$$(1+x) : 1 = 1 : x$$
$$\Leftrightarrow \quad x(1+x) = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$
$$\therefore \quad x = \frac{-1 \pm \yen srqt5}{2} \quad x > o \text{ より } x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

よって,　$AD = 1 + x = \underline{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \quad \cdots(\text{答})}$

(別解)
$\triangle ABC$ は頂角 $\frac{3}{5}\pi$ の二等辺三角形なので

$$\angle BAC = \frac{1}{5}\pi$$



B から AC に下ろした垂線への足を H とすると

$$AH = AB\cos\frac{\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{5}$$

$$\therefore AC = 2\cos\frac{\pi}{5}$$

となる。ここで $\theta = \frac{\pi}{5}$ とすると $5\theta = \pi$

$$\therefore 3\theta = \pi - 2\theta$$

これより

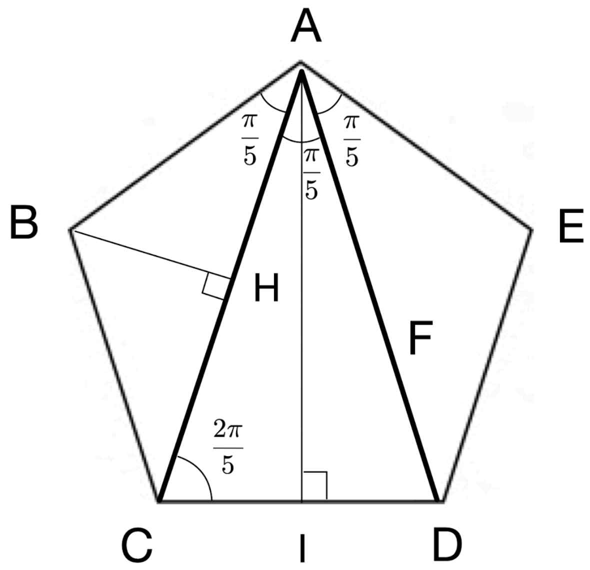
$$\begin{aligned}
&\cos 3\theta = \cos(\pi - 2\theta) = -\cos 2\theta \\
&4\cos^3\theta - 3\cos\theta = -2\cos^2\theta + 1 \\
\Leftrightarrow\quad &4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad &(\cos\theta + 1)\left(4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1\right) = 0 \\
\therefore\quad &\cos\theta = -1, \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

$0 < \cos\theta < 1$ より　$\cos\theta = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

これより　$AC = 2\times\frac{1\pm\sqrt{5}}{4} = \underline{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\quad\cdots(答)}$

(2)

A から CD に垂線を引いた交点を I とすると



$$\begin{aligned}
\cos\frac{2}{5}\pi = \frac{AI}{AC}\cos 25\pi = \frac{AI}{AC} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} \\
&= \underline{\frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \cdots(\text{答})}
\end{aligned}$$

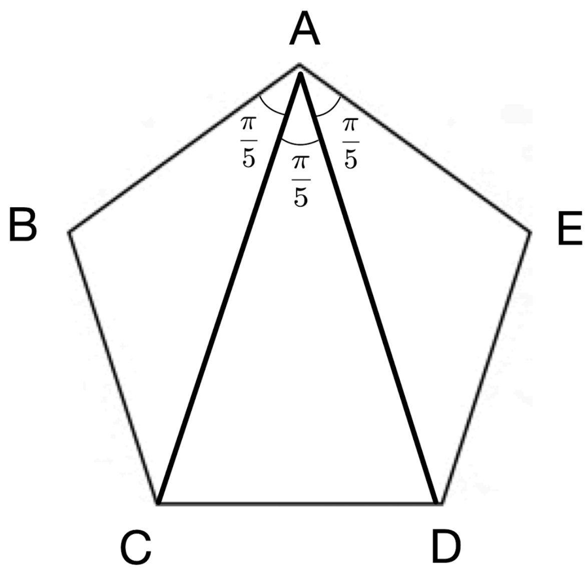
(別解)

$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ より

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{5} &= 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 \\
&= \frac{6+2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - 1 = \underline{\frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \cdots(\text{答})}
\end{aligned}$$

(3)

$AC = AD = a\left(= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ とする正五角形 ABCDE を S とする



$$
\begin{aligned}
S &= \triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE \\
&= 2\triangle ABC + \triangle ACD \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a \sin \pi 5 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \sin \frac{\pi}{5} \\
&= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{5} \times a\,(2+a)
\end{aligned}
$$

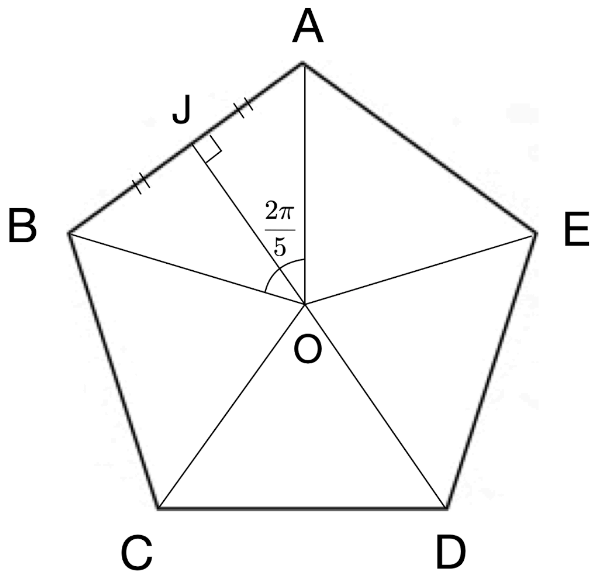
ここで

$$
\begin{aligned}
\sin \frac{\pi}{5} &= \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{5}} \\
&= \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}_{\sin \frac{\pi}{5}} \times \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{a} \times \underbrace{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}_{2+a} \\
&= \frac{10+6\sqrt{5}}{32}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \underline{\frac{5+3\sqrt{5}}{16}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad \cdots (\text{答})}
\end{aligned}
$$

(別解)

五角形の中心を O とすると



$$\triangle AOB = \frac{2\pi}{5}$$

よって　O から AB に下ろした垂線の足を J とすると

$$\angle AOJ = \frac{\pi}{5}, \quad AJ = \frac{1}{2} \quad \text{より}$$

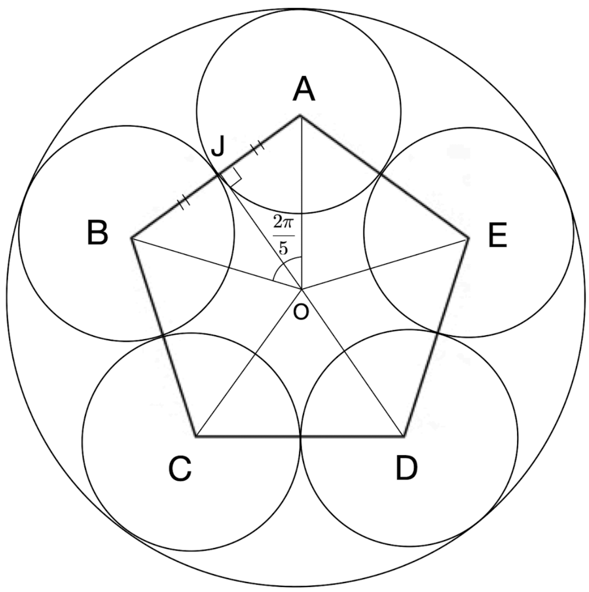
$$\begin{aligned} OA &= \frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = b \quad \text{とする} \end{aligned}$$

よって, 五角形の面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= 5 \times \frac{1}{2} b^2 \sin \frac{2}{5}\pi \\
&= 5 \times \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} b^2 \cdot \cancel{2} \sin \frac{\pi}{5} \cos \pi 5 \\
&= 5 \times \frac{\cancel{4}}{10 - 2\sqrt{5}} \times \frac{1}{\cancel{4}} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \\
&= \frac{5}{8} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \\
&= \frac{5}{8} \times \frac{\left(1 + \sqrt{5}\right)\left(5 + \sqrt{5}\right)}{20} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \\
&= \frac{\cancel{5}}{8} \times \frac{\cancel{10}^5 + \cancel{6}^3\sqrt{5}}{\cancel{20}^{\cancel{10}^5}} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \underline{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{16} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad \cdots (答)}
\end{aligned}
$$

(4)

AB の中点を J とすると $\angle AOJ = \frac{\pi}{5}$ より



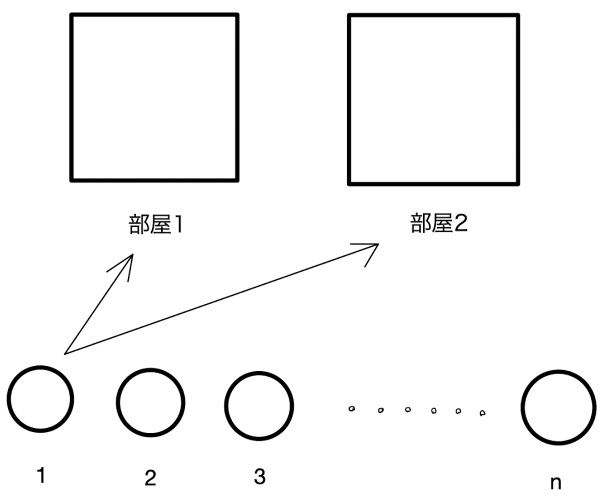
$$
OA = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}}
$$

よって, 求める半径は

$$
\begin{aligned}
OA+\frac{1}{2} &= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}+\frac{1}{2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}+\frac{1}{2} \\
&= \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{10}^{5}-\cancel{2}\sqrt{5}}\sqrt{10-\sqrt{5}}+\frac{1}{2} \\
&= \underline{\frac{5+\sqrt{5}}{20}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\frac{1}{2} \quad \cdots(\text{答})}
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$

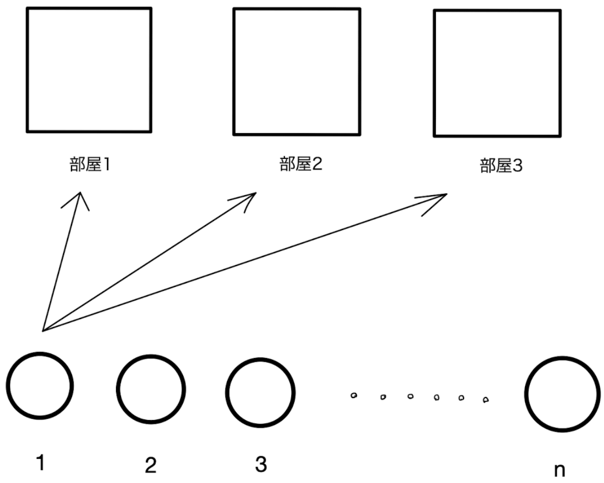
(1) 1 人ずつどちらの部屋を選ぶかで 2^n 通り



そのうち一方の部屋だけに偏るのは 2 通り
よって、　2^n-2 通り

(2) 1 人ずつどの部屋を選ぶかで 3^n 通り
ここから空き部屋が存在する場合を除けば良い

(i) 空き部屋が 1 部屋のみのとき



空き部屋をどこにするのかで 3 通り

残りの 2 部屋に人を入れる入れ方は (1) より $2^n - 2$ 通り

$$\therefore \quad 3\left(2^n - 2\right) \text{通り}$$

(ii) 空き部屋が 2 部屋のとき

空き部屋の選び方は ${}_3C_2 = 3$ 通り

残りの 1 部屋に会員が入るので入り方は 1 通り

$$\therefore \quad 3 \times 1 = 3 \text{通り}$$

以上より

$$3^n - 3(2^n - 2) - 3 = \underline{3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \quad \cdots (\text{答})}$$

(3) 1 人ずつどの部屋を選ぶかで 4^n 通り

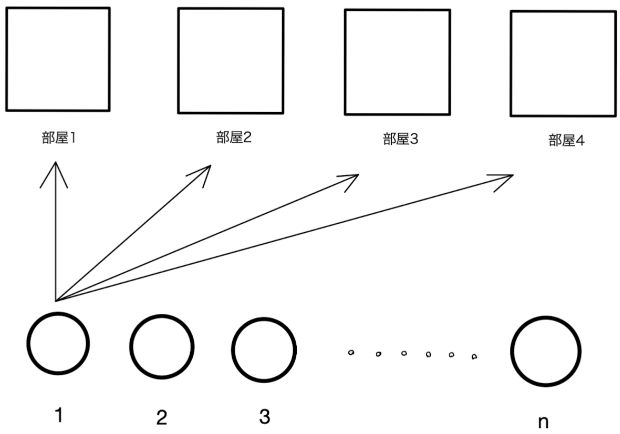
このうち

(i) 空き部屋が 1 部屋あるとき

$$\underbrace{{}_4C_1}_{\text{空き部屋の選び方}} \times \underbrace{\left(2^n - 2\right)}_{\text{2 部屋の人の入れ方: (2) の結果}} = 4\left(3^n - 3 \cdot 2^n + 3\right)$$

(ii) 空き部屋が 2 部屋のとき

$$\underbrace{{}_4C_2}_{\text{空き部屋の選び方}} \times \underbrace{\left(2^n - 2\right)}_{\text{2 部屋の入れ方: (1) の結果}} = 6\left(2^n - 2\right)$$



(iii) 空き部屋が 3 部屋のとき

$$\underbrace{{}_4C_3}_{\text{空き部屋の選び方}} \times 1 = 4$$

以上より

$$4^n - 4\left(3^n - 3 \cdot 2^n + 3\right) - 6 \cdot \left(2^n - 2\right) - 4 = \underline{4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4 \quad \cdots (\text{答})}$$

(4)

(1),(2),(3) の結果より

$k = 2$ のとき $\quad \underbrace{}_{{}_2C_0} 2^n - \underbrace{2}_{{}_2C_1}$

$k = 3$ のとき $\quad \underbrace{}_{{}_3C_0} 3^n - \underbrace{3}_{{}_3C_1} \cdot 2^n + \underbrace{3}_{{}_3C_2}$

$k = 4$ のとき $\quad \underbrace{}_{{}_4C_0} 4^n - \underbrace{4}_{{}_4C_1} \cdot 3^n + \underbrace{6}_{{}_4C_2} \cdot 2^n - \underbrace{4}_{{}_4C_3}$

並べて書くと規則性が見えてきます ${}_kC_0 = 1$ であることを用いると

k のとき

$$\underline{\sum_{l=0}^{k} (-1)^l {}_kC_l (k-l)^n \quad \cdots (\text{答})} \qquad \text{となります}$$

(本来はこれを帰納方なりで証明すべきですが、今回は答えのみでよいのでこれで十分)

$\boxed{3}$

$f(x)$：整式

$$2f(x+2)-3f(x+1)+f(x)=3x^2+15x+6$$
$$f(0)=6,\quad f(1)=0$$

(1)
$x=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} & 2f(2)-3f(1)+f(0)=6 \\ \Leftrightarrow\quad & 2f(2)-0+6=6 \\ \therefore\quad & \underline{f(2)=0\quad \cdots (答)} \end{aligned}$$

(2)
$f(x)$ は整式であり, 右辺が 2 次式であるから, 2 次式以上である
よって

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+g(x)\qquad \left(\begin{array}{l} a,b \text{ は実数},\ a\neq 0 \\ g(x) \text{ は } n-2 \text{ 次以下の整式} \end{array}\right)$$

とおくと

$$\left(\begin{array}{l} f(x+2)=a(x+2)^n+b(x+2)^{n-1}+g(x+2) \\ f(x+1)=a(x+1)^n+b(x+1)^{n-1}+g(x+1) \\ \text{より} \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} 2\{a(x+2)^n+b(x+2)^{n-1}-1g(x+2)\}-3\{a(x+1)^n+b(x+1)^{n-1}+g(x+1)\} \\ +ax^n+bx^{n-1}+g(x)\quad=\quad 3x^2+15x+6 \end{aligned}$$

右辺において x^n の項の係数は

$$2a-3a+a=0$$

x^{n-1} の項の係数は

$$2\left(a\cdot {}_nC_1\cdot 2+b\right)-3\left(a\cdot {}_nC_1+b\right)+b=na$$

となり, これが最高次となることがわかる。よって右辺と比較して

$$\begin{aligned} & nax^{n-1} = 3x^2 \\ \therefore\quad & n-1=2 \quad \Leftrightarrow \quad n=3 \\ & na=3 \quad \Leftrightarrow \quad a=1 \end{aligned}$$

以上より　$f(x)$ は 3 次式で

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \quad (b,\ c,\ d \text{ は実数})$$

と表される。したがって

$$\begin{aligned} f(0) &= d = 6 \\ f(1) &= 1 + b + c + d = 0 \\ f(2) &= 8 + 4b + 2c + d = 0 \end{aligned}$$

これを解いて

$$b = 0, \quad c = -7, \quad d = 6$$

これより

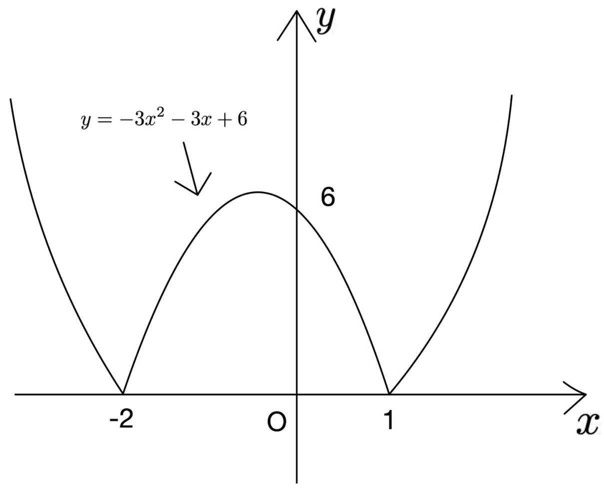
$$\underline{f(x) = x^3 - 7x + 6 \quad \cdots (\text{答})}$$

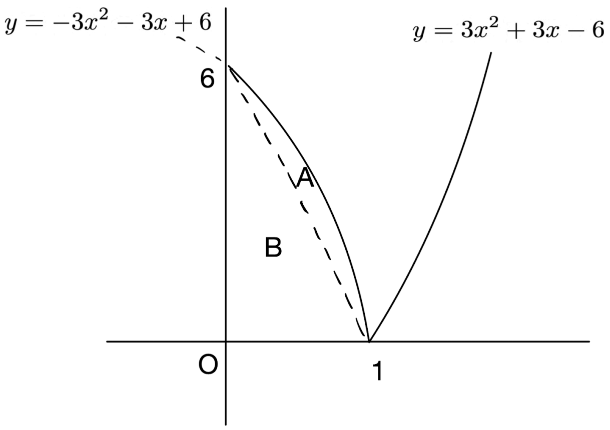
(3)
$f(x) = x^3 - 7x + 6$ より

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= (x+1)^3 - x^3 - 7\{(x+1) - x\} \\ &= 3x - 2 + 3x + 1 - 7 \\ &= 3x^2 + 3x - 6 \\ &= 3(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

よって　$|f(x+1) - f(x)|$ のグラフは図のようになる
　ここでこの曲線の $0 \leqq 1$ の部分の定積分は

$$\begin{aligned} \int_0^1 |3(x+2)(x-1)|\,dx &= \underbrace{\frac{3}{6}(1-0)^3}_{\frac{1}{6}\text{公式 }(A)} + \underbrace{1 \times 6 \times \frac{1}{2}}_{\text{三角形の面積 }(B)} \\ &= \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2} < 17 \end{aligned}$$



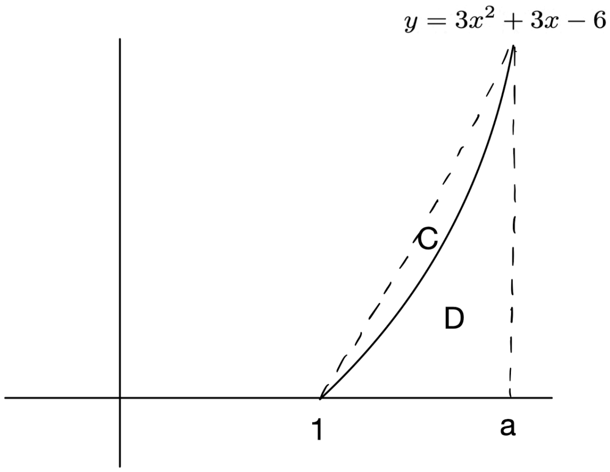


なので, $a>1$ である

$$
\begin{aligned}
& \int_1^a \left(3x^2+3x-6\right)dx = 17-\frac{7}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \left[x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\right]_1^a = \frac{27}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & a^3+\frac{3}{2}a^2-6a-\left(1+\frac{3}{2}-6\right)=\frac{27}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & a^3+\frac{3}{2}a^2-6a-\left(1+\frac{3}{2}-6+\frac{27}{2}\right)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & a^3+\frac{3}{2}a^2-6a-10=0 \\
\Leftrightarrow\quad & 2a^3+3a^2-12a-20=0 \\
\Leftrightarrow\quad & (a+2)(2a^2-a-10)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & (a+2)^2(2a-5)=0
\end{aligned}
$$

$a>0$ より　$\underline{a=\frac{5}{2}\quad\cdots(答)}$

☆ 積分部分は



$\dfrac{1}{6}$公式 (C)：　$\dfrac{3}{6}(a-1)^3$

三角形 (D)：　$(a-1)\times(3a^2+3a-6)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}(a-1)^2(a+2)$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\frac{3}{2}(a-1)^2(a+2)-\frac{1}{2}(a-1)^3\\ =&\frac{1}{2}(a-1)^2\{3(a+2)-(a-1)\}\\ =&\frac{1}{2}(a-1)^2(2a+7)=\frac{27}{2}\end{aligned}$$

として計算できるので, 以下 $a-1=A$ とおいて計算していっても十分です
(積分不要になります)